Stochastische Prozesse

Prof. Dr. N. Bäuerle

SS 2004

Korrekturexemplar !
Fehler bitte an sirtobi@unix-ag.uni-hannover.de mitteilen !
Download-URL: http://www.sirtobi.com/uni_script.shtml
Stand: 22. November 2004

Anmerkung: Diese Vorlesung wurde 4+2 stündig gehalten.
Sie endete aber aus persönlichen Gründen von Frau Bäuerle schon Mitte Mai.
Es kann also sein, daß zukünftige Vorlesungen 2+1 stündige gelesen werden, oder ein größerer Themenbereich erfaßt wird.

Vielen Dank an Heike Opitz für die vielen Mitschriften zu früher Stunde und gelegentliches Antreiben wenn mein innerer Schweinehund wieder zu gewinnen drohte...

Dieses Dokument ist meine Mitschrift der Vorlesung "Stochastische Prozesse" von Prof. Dr. N. Bäuerle im Sommersemester 2004.
Für eventuelle Fehler aller Art übernehme ich keine Verantwortung !
Tobias Müller

Inhaltsverzeichnis

Vorlesungsankündigung:
In der Vorlesung werden sogenannte Markov-Ketten in diskreter und stetiger Zeit behandelt, die eine der wichtigsten Klassen von stochastischen Prozessen darstellen. Sie sind dadurch charakterisiert, dass das zukünftige Verhalten des Prozesses nur vom aktuellen Zustand abhängt und nicht von der Vergangenheit.
Markov-Ketten werden zur Modellierung von zufälligen Abläufen in den verschiedensten Gebieten verwendet, wie z.B. der Informationsverarbeitung und Telekommunikation, der Produktionsplanung, Biologie und Physik. In der Vorlesung werden einige Anwendungsbeispiele aus der Warteschlangentheorie behandelt.

(13.4.2004)

I. Markov-Ketten mit diskretem Zeitparameter

§1. Elementare Eigenschaften von Markov-Ketten (MK)

Gegeben sei eine Folge von ZV (X_n) auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ mit $X_n : \Omega \to S,\ S \neq \emptyset$ endlich oder abzählbar unendlich.

Definition: Eine $S \times S$ Matrix $P = (p_{ij})$ heißt stochastische Matrix,
falls $p_{ij} \geq 0,\ \sum_{j \in S} p_{ij} = 1\ \forall i, j \in S$.

Definition: Sei P eine stochastische Matrix. Eine (endliche oder unendliche) Folge $X, X_1, X_2, \ldots$ von S-stetigen ZV heißt (homogene) Markov-Kette mit Übergangsmatrix P, falls $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall i_k \in S$ mit $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$ gilt:
$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$
Die p_{ij} heißen Übergangswahrscheinlichkeiten und die Startverteilung ν der Kette ist definiert durch $\nu(i) = P(X_0 = i)$ für $i \in S$.

Bemerkung: Jede Folge von unabhängigen ZV ist eine MK.

Satz 1.1 (X_n) ist ein MK mit Übergangsmatrix (ÜM) P
$\Leftrightarrow P(X_k = i_k, 0 \leq k \leq n) = P(X_0 = i) \prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}} \forall n \in \mathbb{N}, \forall i_k \in S$
$\Leftrightarrow P(X_k = i_k, 1 \leq k \leq n | X_0 = i_0) = \prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}} \forall n \in \mathbb{N}, \forall i_k \in S$ mit $P(X_0 = i) > 0$
$\Leftrightarrow P(X_k = i_k, m \leq k \leq m+n) = P(X_m = i_n) - \prod_{k=m}^{m+n-1} p_{i_k i_{k+1}} \forall m, n \in \mathbb{N}_0, i_k \in S$

Beweis: zum ersten "$\Leftrightarrow$":
Sei $A_k := [X_k = i_k] = \{\omega \in \Omega, X_k(\omega) = i_k\}, k \in \mathbb{N}_0$.
"$\Rightarrow$" Induktion: $n = 0\ \surd$
$n \to n+1:\ P(A_0 A_1 \ldots A_{n+1}) = P(A_0 \ldots A_n) P(A_{n+1} | A_0 \ldots A_n) \overset{MK}{=} P(A_{n+1} | A_n) =$
$= p_{i_n i_{n+1}} \overset{IA}{=} P(X_0 = i_0) \prod_{k=0}^{n} p_{i_k i_{k+1}}$

"$\Leftarrow$"
$P(A_{n+1}|A_0 \dots A_n) = \frac{P(A_0 \dots A_{n+1})}{P(A_0 \dots A_n)} \overset{Vor.}{=} p_{i_n i_{n+1}}$ $\square$

Konstruktion einer MK
Seien (Y_n) iid mit Werten in Z. $g : S \times Z \to S$.
Definiere (X_n) mit $X_0 \equiv c,\ X_n = g(X_{n-1}, Y_n)$
Behauptung: (X_n) ist eine MK mit Werten in S und ÜM $P = (p_{ij})$,
$p_{ij} = P(g(i, Y_n) = j),\ i, j \in S$.
Beweis: $P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n,\ X_k = i_k, 0 \leq k \leq n-1) = \frac{P(X_k = i_k, 0 \leq k \leq n+1)}{P(X_k = i_k, 0 \leq k \leq n)} = \frac{P(X_k = i_k, 0 \leq k \leq n, g(i_n, Y_{n+1}) = i_{n+1})}{P(X_k = i_k, 0 \leq k \leq n)} =^{1} P(g(i_n, Y_{n+1}) = i_{n+1}) = \frac{P(g(i_n, Y_{n+1}) = i_{n+1}, X_n, i_n)}{P(X_n = i_n)} = P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n)$ $\square$

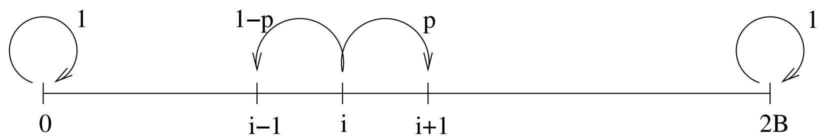
Bemerkung: Umgekehrt kann zu jeder stochastischen Matrix P eine MK (X_n) konstruiert werden mit $X_n = g(X_{n-1}, Y_n)$, wobei (Y_n) iid und o.B.d.A. $Y_n \sim U[0,1]$ ($\hat{=} unif[0,1]$)

Beispiel 1.1 (Lagerhaltung)
Sei Y_n Nachfrage im Zeitintervall $(n-1, n]$.
(Y_n) iid mit $Y_n \in \mathbb{N}_0$.
Auffüll-Politik: $(z, Z), z \leq Z, z, Z \in \mathbb{N}$, falls Lagerbestand zur Zeit $n \leq z$, dann fülle auf Z auf. Sonst tue nichts.
Sei X_n der Lagerbestand zur Zeit n, $S = \mathbb{N}_0$.
Es gilt: $X_n = \begin{cases} (Z - Y_n)^+ & , X_{n-1} \leq z \\ (X_{n-1} - Y_n)^+ & , X_{n-1} > z \end{cases}$
Also ist (X_n) eine MK mit ÜM $P = (p_{ij})$.
$p_{ij} = \begin{cases} P((Z - Y_n)^+ = j) & , X_{n-1} \leq z \\ P((i - Y_n)^+ = j) & , i > z \end{cases}$

Beispiel 1.2 (Ruinspiel)
Zwei Spieler mit Startkapital $B \in \mathbb{N}$. Spieler I gewinnt mit W. p. Einsatz pro Spiel: 1.
Sei $Y_n = 1\ (-1)$, falls Spieler I das n-te Spiel gewinnt (verliert). (Y_n) iid.
Sei X_n das Kapital von Spieler I zur Zeit n.
$S = \{0, 1, \dots, 2B\}$.
Es gilt: $X_0 \equiv B$
$X_n = \begin{cases} 2B & , X_{n-1} = 2B \\ 0 & , X_{n-1} = 0 \\ X_{n-1} + Y_n & , 0 < X_{n-1} < 2B \end{cases}$
Also ist (X_n) eine MK mit ÜM $P = (p_{ij})$, $P_{00} = 1$, $P_{2B,2B} = 1$,
$p_{ij} = \begin{cases} p & , j = i+1 \\ 1-p & , j = i-1 \end{cases} \quad 0 < i < 2B$

[1] $(X_0, \dots, X_n), Y_{n+1}$ unabhängig

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{(Spalten und Zeilen jeweils von } 0 \ldots 2B\text{)}$$



(19.4.2004)

Definition: Sei P eine stochastische $S \times S$-Matrix. Dann heißen die Elemente $p_{ij}^{(n)}$ von P^n die <u>n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit</u> zu P. Wir definieren $P^0 := E$, d.h. $p_{ij}^{(n)} = \delta_{ij}\ \forall i, j \in S$.

Satz 1.2 Sei (X_n) eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P.
Dann gilt:

a) $P(X_{n+m} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)},\ \forall i, j \in S,\ n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $P(X_m = i) > 0$

b) $P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_0 = i) p_{ij}^{(n)},\ j \in S$

<u>Beweis:</u>
a) Mit Satz 1.1 (☞ S. 4) gilt:
$P(X_{n+m} = j | X_m = i) = \sum_{i_{m+1}, \ldots, i_{n+m-1}} P(X_m = i_m) * \prod_{k=m}^{m+n-1} p_{i_k i_{k+1}} =$
$= P(X_m = i_m) p_{i_m i_{m+n}}^{(n)}$
b) $P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_n = j, X_0 = i) =$
$= \sum_{i \in S} P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \overset{(a)}{=} \sum_{i \in S} P(X_0 = i) p_{ij}^{(n)}$. □

Bemerkung:

(i) Wegen $p^{n+m} = p^n p^m$ gilt:
$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$ für $i, j \in S$
die sogenannten "Chapman-Kolmogorow-Gleichungen"

(ii) $X_0 \sim \nu \Rightarrow X_n \sim \nu P^n$

Satz 1.3 (Existenzsatz für MK)
Sei ν ein WMaß auf S und P eine stochastische $S \times S$-Matrix.
Seien X_n die n-te Projektion auf $\Omega := S^{\mathbb{N}_0}$, d.h.
$X_n : \Omega \to S,\ n \in \mathbb{N}_0, \quad X_n(\omega) = X_n((i_0, i_1, i_2, \dots)) = i_n$.
Dann existiert ein WMaß P auf $\mathcal{F} := \otimes_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}(S)$, so daß (X_n) eine MK mit ÜM P ist und ν die Startverteilung von X_0 ist, d.h.

$$P(X_0 = i_0) = \nu(i_0) \quad i_0 \in S$$
$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij} \quad \forall i, j \in S,\ P(X_n = i) > 0$$

Beweis:
Satz von Ionescu-Tulcea über die Fortsetzung von Maßen und die Existenz zufälliger Folgen.

§2. Klassifikation von Zuständen, Rekurrenz und Transienz

Welche Zustände in S werden von der Markov-Kette mit Sicherheit besucht und welche nicht? Wenn sie besucht werden, wie oft?

Definition: Sei (X_n) eine MK mit ÜM $P = (p_{ij})$.

a) $i \in S$ führt nach $j \in S$ ($i \rightsquigarrow j$), falls $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}^{(n)} > 0$ d.h. $\exists n, m \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$.

b) $i \in S$ kommuniziert mit $j \in S (i \leftrightarrow j)$, falls $(i \rightsquigarrow j) \wedge (j \rightsquigarrow i)$ d.h. $\exists n, m \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$.

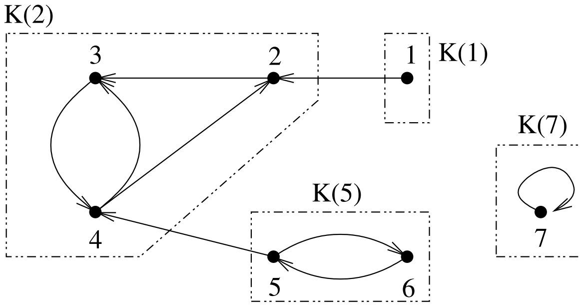
Bemerkung: Für $i, j \in S$ sei $i \sim j := (i \leftrightarrow j) \vee (i = j) \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$.
"$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation auf S (reflexiv, symmetrisch, transitiv)
$\Rightarrow$ "$\sim$" impliziert eine Partition von S.
$K(i) := \{j \in S | j \sim i\}$ sind zugehörige Äquivalenzklassen.

Definition:

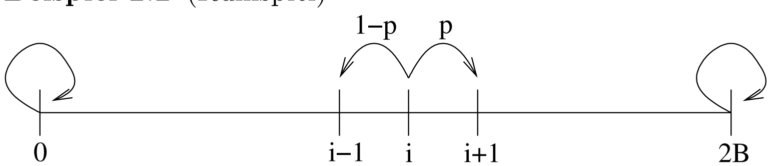
a) $J \subset S$ heißt abgeschlossen, wenn es keine zwei Zustände $j \in J$ und $i \in S \backslash J$ gibt mit $j \rightsquigarrow i$.

b) Die MK (X_n) bzw. die ÜM P heißen irreduzibel, falls S nur aus einer einzigen Klasse besteht, d.h. $\forall i, j \in S$ mit $i \neq j$ gilt: $i \leftrightarrow j$.

Beispiel 2.1 $K(2)$ und $K(7)$ sind abgeschlossen.

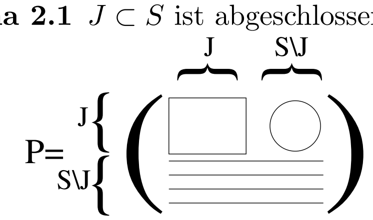


Beispiel 2.2 (Ruinspiel)

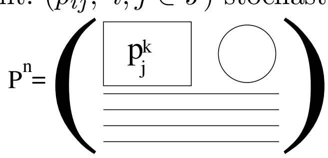


$K(0) = \{0\}), K(2B) = \{2B\}, K(1) = \{1, 2, \ldots, 2B-1\}$
$K(0)$ und $K(2B)$ sind abgeschlossen.

Lemma 2.1 $J \subset S$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $(p_{ij},\ i, j \in J)$ ist stochastisch.



<u>Beweis:</u> "$\Leftarrow$": klar.
"$\Rightarrow$": offenbar gilt: $(p_{ij},\ i, j \in J)$ stochastisch $\Leftrightarrow$ $(p_{i,j},\ i, j \in J)$ sotchastisch $\forall n \in \mathbb{N}$.



$\Rightarrow$ Behauptung.

$\square$

Im Folgenden sei (X_n) eine MK mit ÜM $P = (p_{ij})$.
Es sei $T_i := inf\{n \in \mathbb{N} | X_n = i\}$ die Ersteintrittszeit der MK in den Zustand $i \in S$. $(inf(\emptyset) := \infty)$
Weiter sei für $i, j \in S,\ n \in \mathbb{N}:$
$f_{ij}^{(n)} := p_i(T_j = n) = P(T_j = n | X_0 = i) = P(X_n = j, X_\nu \neq j, 1 \leq \nu < n | X_0 = i)$
$f_{ij}^{(0)} := 0$
Offenbar ist $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$
$f_{ij}^{*} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_i(T_j = n) = p_i(T_j < \infty) = p_i(\exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } X_n = j) \in [0, 1].$

(20.4.2004)

Lemma 2.2 Für alle $n \in \mathbb{N},\ i,j \in S$ gilt:
$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$

Beweis: Methode des 1. Besuchs:

$$P_{ij}^{(n)} = P_i(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P(\overbrace{X_n = j}^{A}, \overbrace{X_\mu \neq j, 1 \leq \mu < k, X_k = j}^{B} \,|\, \overbrace{X_0 = i}^{C})$$
$[P(AB|C) = P(B|C)P(A|BC)]$
$$= \sum_{k=1}^{n} P_i(X_\mu \neq j, 1 \leq \mu < k, X_k = j)\, \underbrace{P(X_n = j | X_0 = i, X_\mu \neq j, 1 \leq \mu < k, X_n = j)}_{=MK \quad P(X_n = j|X_k = j)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \qquad \square$$

Definition: Ein Zustand $i \in S$ heißt rekurrent, falls $f_{ii}^* = 1$ und transient, sonst.

Satz 2.3 $i \in S$ ist rekurrent $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

Beweis: Für $s \in (0,1)$ erhalten wir aus Lemma 2.2:
$\sum n = 0^\infty P_{ii}^{(n)} s^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (s^n \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)})$
$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ii}^{(k)} s^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} s^{(n-k)}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} s^k \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n.$
Es sei $P(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n,\ F(s) := \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} s^k.$
Also $P(s) = 1 + P(s)F(s)$.
Nun $s \to 1$ (monotone Konvergenz): $P(1) = 1 + P(1) f_{ii}^*$.
Es folgt: $f_{ii}^* = 1 \Rightarrow P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$
$f_{ii}^* < 1 \Rightarrow P(1) = \frac{1}{1-f_{ii}^*} < \infty$ $\square$

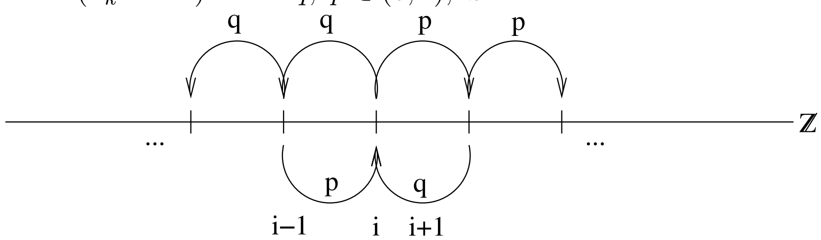
Bemerkung: Die in Satz 2.3 auftretende Reihe kann man wie folgt interpretieren:
$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_i[1_{[X_n = i]}] = E_i[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{[X_n = i]}]$

Satz 2.4 (Solidaritätsprinzip)
Wenn $i \in S$ rekurrent (transient) $\Rightarrow$ jeder Zustand in $K(i)$ ist rekurrent (transient).

Beweis: Sei $i \in S$ rekurrent, $j \in K(i),\ j \neq i$.
$\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$.
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+k)} \overset{CK}{\geq} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)} = p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)}}_{=\infty}$$
$\Rightarrow j$ ist rekurrent. $\square$.

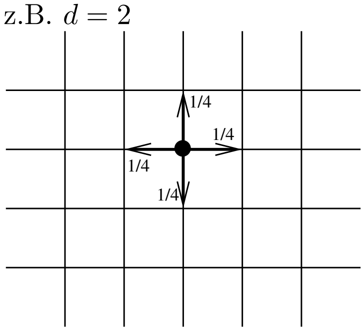
Bemerkung: Ist $i \in S$ rekurrent (transient), so sagen wir $K(i)$ ist rekurrent (transient). Ist (X_n) irreduzibel, so sagen wir (X_n) ist rekurrent (transient).

Beispiel 2.3 (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)
Es sei $X_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k = X_{n-1} + Y_n,\ X_0 = 0$, wobei (Y_n) iid mit $P(Y_k = 1) = p = 1 - P(Y_k = -1) = 1 - q,\ p \in (0,1),\ S = \mathbb{Z}$.



(X_n) ist nach Konstruktion eine irreduzible MK.
Ist die MK rekurrent oder transient?
Wir wenden Satz 2.3 an. Sei o.B.d.A. $i = 0$. Es gilt:
$p_{00}^{(2n+1)} = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$,
$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n q^n$
$\Rightarrow P_{00}^{(2n)} \approx$[2]$\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}(pq)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$.
Fall 1: $p = q = \frac{1}{2}$ (symmetrische Irrfahrt)
$p_{00} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow \sum_n p_{00}^{(2n)} = \infty \Rightarrow$ MK rekurrent
Fall 2: $p \neq q$ ($\Rightarrow pq < \frac{1}{4}$)
$\Rightarrow \sum_n p_{00}^{(2n)} \leq const \sum_{n=0}^{\infty} (4pq)^n < \infty \Rightarrow$MK transient.

Bemerkung: betrachtet man die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, d.h. $p_{ij} = \frac{1}{2d}$ für $|i-j| = 1$ ($|| = l^1$-Norm), $i, j \in \mathbb{Z}^d$.
z.B. $d = 2$



(jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$)
dann ist sie rekurrent für $d \in \{1, 2\}$ und transient für $d \geq 3$.

Lemma 2.5 Liegen i und j in der selben rekurrenten Klasse, so gilt $f_{ij}^* = f_{ji}^* = 1$

Beweis: Übung.

[2] Stirling-Formel: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Lemma 2.6 Für alle $i, j \in S$ gilt:
j transient $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$.
Insbesondere ist $lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

Beweis: Summiere die Gleichung in Lemma 2.2 über alle n. (☞ Satz 2.3, Seite 9)
$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} =$
$= \delta_{ij} + f_{ij}^{*} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}}_{<\infty,\ da\ j\ transient} < \infty.$ □

Satz 2.7 Ist eine Klasse $K \subset S$ rekurrent, so ist K abgeschlossen bzw. $(p_{ij},\ i, j \in K)$ ist stochastisch.

Beweis: Wir zeigen: ist $i \in K$ rekurrent und $i \rightsquigarrow j$ $(i \neq j)$, dann gilt $j \rightsquigarrow i$ (d.h. $j \in K$)
($\Rightarrow$ Behauptung, denn angenommen $(p_{ij},\ i, j \in K)$ ist nicht stochastisch,
$\Rightarrow \exists i \in K, j \neq K$ mit $p_{ij} > 0$, also $i \rightsquigarrow j \Rightarrow j \in K$ ↯)

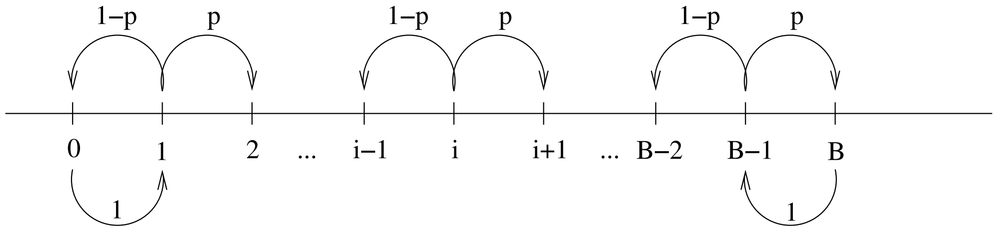
(26.4.2004)

Wir zeigen: ist $i \in K,\ i$ rekurrent und $i \rightsquigarrow j$ $(j \neq i)$, dann gilt $j \rightsquigarrow i$ (d.h. $j \in K$).
($\Rightarrow$ Behauptung, angenommen $(P_{ij},\ i, j \in K)$ ist nicht stochastisch $\Rightarrow\ \exists i \in K,\ \exists j \notin K$ mit $P_{ij} > 0$, also $i \rightsquigarrow j$. $\Rightarrow j \in K$ ↯)
Angenommen: $j \not\rightsquigarrow i$, d.h. $p_{ji}^{(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.
Sei $N \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl n mit $p_{ij}^{(n)} > 0$.
Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}:\ P_i(X_N = j,\ X_N = i) = 0$, denn sei $n > N$:
$P_i(X_N = j,\ X_n = i) = P_{ij}^{(N)} p_{ji}^{(n-N)} = 0$
Sei $n < N : P_i(X_N = j,\ X_n = i) = P_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(N-n)} = 0$, da $N - n < N$
$\Rightarrow P_i(T_i \le m,\ X_N = k) = \sum_{n=1}^{m} P_i(T_i = n,\ X_N = j) \le \sum_{n=1}^{m} P_i(X_n = i,\ X_N = j) = 0$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m} f_{ii}^{(n)} = P_i(T_i \le m) = P_i(T_i \le m,\ X_N \neq j) \le P_i(X_N \neq j) = 1 - P_i(X_N = j) =$
$= 1 - p_{ij}^{(N)}$
Für $m \to \infty$ folgt: $1 = j_{ii}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \le 1 - p_{ij}^{(N)} < 1$ ↯ □

Satz 2.8 Ist $K \subset S$ endlich und K abgeschlossen, so ist K rekurrent.

Beweis: Da $(P_{ij},\ i, j \in K)$ stochastisch, folgt induktiv $(p_{ij},\ i, j \in K)$ ist sotchastisch $\forall n \in \mathbb{N}$.
Annahme: K transient.
Sei $j \in K \Rightarrow p_{ij}^{(n)} \to 0$ für $n \to \infty$ $\forall i \in S$ (Lemma 2.6, Seite 11)
$\Rightarrow$ für $i \in K$: $1 = \sum_{j\in K} p_{ij}^{(n)} \to 0$ für $n \to \infty$ ↯
(Da K endlich ist, sind lim und $\sum$ vertauschbar.) □

Beispiel 2.4 (Irrfahrt mit reflektierenden Grenzen)



(mit $p \in (0,1)$)
Die Irrfahrt ist irreduzibel und rekurrent nach Satz 2.8 $\forall p \in (0,1)$.

§3. Gleichgewichtsverteilungen

Sei (X_n) eine MK mit Übergangsmatrix P und Startverteilung ν. Dann ist die Verteilung der MK zur Zeit n:

$$X_n \sim \nu P^n$$

Im Allgemeinen hängt diese Verteilung von ν und n ab. Es gibt aber spezielle Verteilungen ν, so daß die mit dieser Verteilung gestartete Markov-Kette zu jedem Zeitpunkt n dieselbe Verteilung besitzt, nämlich ν. Man sagt, die Kette ist dann im Gleichgewicht, bzw. sie ist stationär.

Bezeichnung: Eine Abbildung $\nu : S \to \mathbb{R}_+$ heißt Maß . Ein Maß ν ist eine Verteilung, falls $\sum_{i \in S} \nu(i) = 1$.

Definition: Es sei (X_n) eine MK mit ÜM P. Ein Maß ν heißt invariant (stationär) für P, falls $\nu P = \nu$, d.h. $\forall j \in S$ gilt: $\sum_{i \in S} \nu(i) P_{ij} = \nu(j)$.
Falls ν eine Verteilung und invariant ist, nennt man ν auch eine Gleichgewichtsverteilung für P.

Bemerkung:

a) Ist S endlich, so kann jedes invariante Maß zu einer Gleichgewichtsverteilung normiert werden.

b) Ist ν invariant, so gilt: $\nu P^n = \nu P P n - 1 = \nu P^{n-1} = \cdots = \nu \forall n \in \mathbb{N}$. Ist ν eine Gleichgewichtsverteilung, so gilt also $\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in S : P_\nu(X_n = j) = \sum_{i \in S} \nu(i) p_{ij}^{(n)} = \nu(j)$, d.h. die mit Verteilung ν gestartete Kette hat zu jedem Zeitpunkt die gleiche Verteilung ν.

c) Ist P irreduzibel und $\nu \neq 0$ ein invariantes Maß , so ist $\nu(i) > 0 \; \forall i \in S$.
Denn: $\nu \not\equiv 0 \Rightarrow \exists i_0 \in S : \nu(i_0) > 0$.
Für $i \in S$ beliebig, $\exists n \in \mathbb{N} \; p_{i_0 i}^{(n)} > 0. \Rightarrow \nu(i) \geq \nu(i_0) p_{i_0 i}^{(n)} > 0$.

Gibt es immer ein invariantes Maß /Gleichgewichtsverteilung?
Wenn ja, wie sieht sie aus? Ist sie eindeutig?

Für den Rest des Abschnitts sei P irreduzibel. Wir definieren für ein beliebeiges $k \in S$ das Maß ν_k wie folgt:

$$\nu_k(i) := E_k[\sum_{n=1}^{T_k} 1_{[X_n=i]}]$$

Satz 3.1 Sei (X_n) irreduzibel und rekurrent, $k \in S$. Dann gilt:

a) ν_k ist ein invariantes Maß

b) $\forall i \in S$ gilt: $0 < \nu_k(i) < \infty$

c) ν_k ist das einzige invariante Maß mit $\nu_k(k) = 1$.
(d.h. ν_k ist bis auf ein Vielfaches eindeutig.)

Beweis:
b) $\nu_k(i) > 0 \forall i \in S$ folgt aus Teil a) und der letzten Bemerkung c) (Beachte: $\nu_k(k) = 1$).
Wegen: $\nu_k = \nu_k P^n \forall n$ folgt ebenso: $1 = \nu_k(k) \geq \nu_k(j) p_{jk}^{(n)} \forall j \in S, \ \forall n \in \mathbb{N}$
P irreduzibel $\Rightarrow \forall j \in S, \ \exists n \in \mathbb{N} : p_{jk}^{(n)} > 0$
$\Rightarrow \nu_k(j) < \infty$.

(27.4.2004)

a) Es gilt:

$$\nu_k(i) = E_k[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{[X_n=i, n \leq T_k]}] = \sum_{n=1}^{\infty} P_k(X_n = i, n \leq T_k)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in S} P_k(X_n = i, X_{n-1} = j, n \leq T_k)$$

Betrachte ($j \neq k$):

$P_k(X_n = i, X_{n-1} = j, n \leq T_k) = \frac{P(X_n=i, X_{n-1}=j, X_{n-1} \neq k, \ldots, X_1 \neq k, X_0=k)}{P(X_0=k)} = P(X_n = i | X_{n-1} = j, X_{n-1} \neq k, \ldots, X_1 \neq k, X_0 = k) P_k(X_{n-1} = j, X_{n-1} \neq k, \ldots, X_1 \neq k) = p_{ji} P_k(X_{n-1} = j, n \leq T_k)$

Oben einsetzen:

$$\nu_k(i) = \sum_{j \in S} p_{ji} \sum_{n=1}^{\infty} P_k(X_{n-1} = j, n \leq T_k)$$
$$= \sum_{j \in S} p_{ji} \sum_{n=0}^{\infty} P_k(X_n = j, n \leq T_{k-1})$$
$$= \sum_{j \in S} p_{ji} E_k[\sum_{n=0}^{T_k - 1} 1_{[X_n=j]}]$$
$$= \sum_{j \in S} p_{ji} E_k[\sum_{n=1}^{T_k} 1_{[X_n=j]}]$$
$$= \sum_{j \in S} p_{ji} \nu_k(j)$$

c) Sei λ ein invariantes Maß mit $\lambda(k) = 1$.
$\forall j \in S$ folgt: $\lambda(j) = \sum_{i \in S \setminus \{k\}} \overline{\lambda(i)} p_{ij} + p_{kj}$

$$\lambda(j) = \sum_{i \in S \setminus \{k\}} \underline{(\sum_{l \in S \setminus \{k\}} \overline{\lambda(l) p_{li}} + p_{ki}) p_{ij}} + p_{kj}$$
$$= \sum_{i,l \in S \setminus \{k\}} \lambda(l) p_{li} p_{ij} + \sum p_{ki} p_{ij} + p_{kj}$$
$$= \sum_{i,l \in S \setminus \{k\}} \lambda(l) p_{li} p_{ij} + p_k(X_2 = j, T_k \geq 2) + P_k(X_1 = j, T_k \geq 1)$$

Durch Iteration erhalten wir $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(j) = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_n \in S \setminus \{k\}} \lambda(i_n) \prod_{r=1}^{n} p_{i_r i_{r-1}} p_{i_0 j} + \sum_{r=1}^{n+1} p_k(X_r = j, T_k \geq r)$$
$$\geq \sum_{r=1}^{n+1} P_k(X_r = j, T_k \geq r) = E_k[\sum_{r=1}^{min\{n+1, T_k\}} 1_{[X_r=j]}] \xrightarrow{n \to \infty} \nu_k(j)$$

Insgesamt: $\lambda(j) \geq \nu_k(j) \ \forall j \in S$.

$\rightarrow \lambda - \nu_k$ ist ebenfalls ein invariantes Maß mit $\lambda(k).\nu_k(k) = 0 \overset{Bem.\ c)}{\Longrightarrow} \lambda \equiv \nu_k$ $\square$

Bemerkung: Ist S endlich und P irreduzibel, so folgt aus Satz 3.1, daß eine Gleichgewichtsverteilung existiert.

Definition: Für $i \in S$ sei
$m_i := E_i[T_i] = \sum_{n=1}^{\infty} nP_i(T_i = n) + \infty(1 - f_{ii}^*) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)}} + \infty(1 - f_{ii}^*)$
die <u>mittlere Rückkehrzeit</u> im Zustand i, mit $0 \cdot \infty =: 0$.
Anmerkung: Hier wurde in der Folgevorlesung nachgebessert,
ursprünglich fehlten die $\infty()$-Terme.

Bemerkung: Ist j transient, so folgt $m_j = \infty$.

Definition: Ein Zustand $i \in S$ heißt <u>positiv rekurrent</u>, falls $m_i < \infty$ und <u>nullrekurrent</u>, falls i rekurrent und $m_i = \infty$ ist.

Bemerkung: Jeder positiv rekurrente Zustand ist auch rekurrent.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{transient } f^*_{ii}<1 & & \\ & \nearrow & & & \\ i & & & & \text{nullrekurrent } m_i=\infty \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{rekurrent } f^*_{ii}=1 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & \text{positiv rekurrent } m_i<\infty \end{array}$$

Satz 3.2 Sei (X_n) eine irreduzible MK. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:

i) Es existiert eine Gleichgewichtsverteilung.

ii) Es gibt einen positiv rekurrenten Zustand $i \in S$.

iii) Alle Zustände in S sind positiv rekurrent.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Gleichgewichtsverteilung π eindeutig bestimmt und durch $\pi(i) = \frac{1}{m_i}$ gegeben.

<u>Beweis:</u> (iii)$\Rightarrow$(ii): klar
(ii)$\Rightarrow$(i): Sei $k \in S$ mit $m_k < \infty \Rightarrow (X_n)$ ist rekurrent.
Satz 3.1$\Rightarrow$ ν_k ist ein invariantes Maß .
Es gilt:

$$\sum_{j\in S} \nu_k(j) = \sum_{j\in S} E_k[\sum_{n=1}^{T_k} 1_{[X_n=j]}] = E_k[\sum_{n=1}^{T_k} \overbrace{\sum_{j\in S} 1_{[X_n=j]}}^{=1}] = E_k[T_k] = m_k < \infty.$$

$\Rightarrow \nu_k$ ist normierbar.
(i)$\Rightarrow$(iii): Sei π eine Gleichgewichtsverteilung und $k \in S$ ($\Rightarrow \pi(k) > 0 \; \forall k \in S$). Dann ist $\nu := \frac{\pi}{\pi(k)}$ ein invariantes Maß mit $\nu(k) = 1$.
$\Rightarrow \nu = \nu_k \overset{s.o.}{\Rightarrow} m_k = \sum_{j \in S} \nu_k(j) = \sum_{j \in S} \nu(j) = \frac{1}{\pi(k)} \underbrace{\sum_{j \in S} \pi(j)}_{=1} = \frac{1}{\pi(k)} < \infty.$

Da k beliebig, folgt die Behauptung.
Außerdem ist gezeigt, daß $\pi(k) = \frac{1}{m_k}$.

Bemerkung:

(i) Es gibt also folgende Trichotomie für irreduzible MK, d.h. eine irreduzible MK gehört genau zu einem der folgenden Fälle:

- die MK ist transient, es gibt keine Gleichgewichtsverteilung.
- die MK ist nullrekurrent, $\forall i, j \in S$ gilt $P_i(T_j < \infty) = 1$ und $E_i[T_j] = \infty$ und es gibt ein (bis auf Vielfache) eindeutiges, invariantes Maß , aber keine Gleichgewichtsverteilung.
- die MK ist positiv rekurrent, $\forall i, j \in S$ gilt $E_i[T_j] < \infty$ und es gibt eine Gleichgewichtsverteilung.

(ii) Ist S endlich und die MK irreduzibel, so ist die MK automatisch positiv rekurrent.

(iii) Ist π die Gleichgewichtsverteilung, so gilt:
$\pi(i) = \frac{\nu_k(i)}{\sum_{j \in S} \nu_k(j)} = \frac{E_k[\sum_{n=1}^{T_k} 1_{[X_n = i]}]}{E_k[T_k]}$

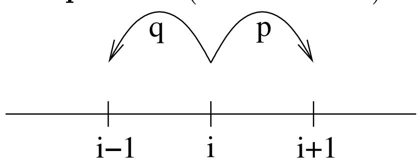
Beispiel 3.1
$S = \{1, 2\}$. Die ÜM sei gegeben durch $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta > 0$.
Die MK ist irreduzibel und positiv rekurrent.

Gleichgewichtsverteilung: $\pi P = \pi, \quad \pi(1) + \pi(2) = 1, \quad \pi(1), \pi(2) \geq 0$
Lösung: $\pi(1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \; \pi(2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

(3.5.2004)

Zusammenfassung
$\nu P = \nu, \; \nu \geq 0$
$\pi P = \pi, \; \pi \geq 0 \quad \sum_{i \in S} \pi(i) = 1$
("Gleichgewichtsverteilung" oder "stationäre Verteilung")
$\pi(j) = \frac{E_k[\sum_{n=1}^{T_k} 1_{[X_n = j]}]}{E_k[T_k]}, \; k \in S.$

Beispiel 3.2 (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)



$p_{i\ i+1} = p,\ p_{i\ i-1} = q\ \ \forall \mathbb{Z}$
$p \in (0,1),\ q = 1-p$
Für $p \neq q$ ist die MK transient (☞ Beispiel 2.3, Seite 10).
Existiert ein invariantes Maß ?
Ansatz:

$$P = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
\dots & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & & \\
 & \dots & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & \\
 & & \dots & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & j^{te} & & & &
\end{array}\right)$$

$\nu(j) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \nu(i)P_{ij}$
$\quad = 1 * \nu(j) = (p+q)\nu(j) = \nu(j-1)p + \nu(j+1)q\ \ \forall j \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \nu(j+1) - \nu(j) = \frac{p}{q}(\nu(j) - \nu(j-1))\ \forall j \in \mathbb{Z}$
Also: $\nu_1 \equiv 1,\ \nu_2(j) = \left(\frac{p}{q}\right)^j$ sind verschiedene invariante Maße.

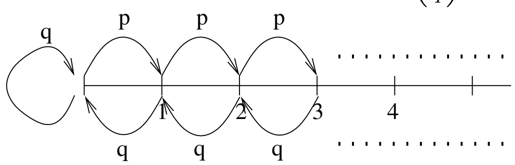
Beispiel 3.3 (Geburts- und Todesprozess in diskreter Zeit)
Es sei (X_n) eine MK mit $S = \mathbb{N}_0$ und Übergansmatrix

$$\begin{pmatrix}
p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & \dots \\
p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & \dots \\
\vdots & & \ddots & & &
\end{pmatrix}$$

mit $p_{01} > 0,\ p_{ii-1} > 0,\ p_{ii+1} > 0\ \ \forall i \geq 1$
$\Rightarrow (X_n)$ irreduzibel

Wann ist (X_n) positiv rekurrent?
Ansatz: $\pi = \pi P$
$\pi(0) = p_{00}\cancel{\pi(0)+}p_{10}\pi(1) \quad \leftarrow$ Erweitern mit $1 = (\underline{p_{00}} + p_{01})$
$\pi(i) = p_{i-1,i}\pi(i-1) + p_{ii}\pi(i) + p_{i+1,i}\pi(i+1)\ ,i \geq 1$
$\nwarrow$ Erweitern mit $1 := (p_{i,i-1} + p_{ii} + p_{i,i+1})$
$\Leftrightarrow p_{i+1,i}\pi(i+1) - p_{i,i+1}\pi(i) = p_{ii-1}\pi(i) - p_{i-1,i}\pi(i-1)$
$= \cdots \overset{rekursiv}{=} p_{10}\pi(1) - p_{01}\pi(0) = 0$

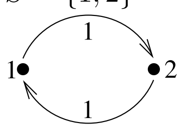
$\nwarrow$ 1. Gleichung: $p_{01}\pi(0) = p_{10}\pi(1)$
$\Rightarrow p_{i+1,i}\pi(i+1) = p_{i,i+1}\pi(i)$
$\Rightarrow \pi(i+1) = \frac{p_{i,i+1}}{p_{i+1,i}}\pi(i) = \cdots =$
$= \cdots = \pi(0)\prod_{k=0}^{i}\frac{p_{k,k+1}}{p_{k+1,k}}, \quad \forall i \geq 0$
Für $\pi(0) > 0$ erhält man ein invariantes Maß .
(X_n) ist positiv rekurrent, falls $\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{k=0}^{i}\frac{p_{k,k+1}}{p_{k+1,k}} < \infty$
Spezialfall:
$p_{k,k+1} = p,\ p_{k,k-1} = q = 1-p,\ p_{k,k} = 0, \quad \forall k \geq 1, p \in (0,1)$
$p_{01} = p,\ p_{00} = 1-p$
(X_n) positiv rekurrent $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{i+1} < \infty \Leftrightarrow p < q$ (geom. Reihe)



§4. Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung

$X_n \sim \nu P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$
$\pi P^n = \pi$

Beispiel 4.1
$S = \{1, 2\}$



$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi P = \pi,\ \pi(1) = \pi(2)\frac{1}{2},\ (1,0)P^n$

Interpretation: “Die Hälfte der Zeit in Zustand 1, die andere Hälfte in Zustand 2”
Sei (X_n) eine MK mit ÜM P. Wir nehmen an, daß (X_n) bzw. P aperiodisch ist, d.h. $\forall i \in S$ gilt:

$$d_i := ggT\{n \in \mathbb{N} \mid p_{ii}^{(n)} > 0\} = 1$$

Lemma 4.1 P ist genau dann irreduzibel und periodisch,
wenn $\forall i, j \in S,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $P_{ij}^{(n)} > 0\ \forall n \geq n_0$.

Beweis: ohne Beweis!

Satz 4.2 Es sei (X_n) irreduzibel, aperiodisch und positiv rekurrent mit Gleichgewichtsverteilung π. Dann gilt $\forall i, j \in S$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi(j) = \frac{1}{m_j}$$

<u>Beweis:</u> Wir benutzen ein sogenanntes Kopplungsargument:
Sei (Y_n) eine zweite MK, unabhängig von (X_n) mit derselben ÜM P und Startverteilung π, d.h. $Y_n \sim \pi \ \forall n \in \mathbb{N}$. Es sei $T := inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n = Y_n\}$ die Treffzeit der MK.

Wir zeigen zunächst: $P(T < \infty) = 1$.
Offensichtlich ist $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine MK auf S^2 mit ÜM $\hat{P}$, wobei $\hat{p}_{(i,j)(k,l)} =^3 p_{ik}p_{jl}$.
Weiter ist $\hat{p}^{(n)}_{(i,j)(k,l)} = p^{(n)}_{ik}p^{(n)}_{jl}$.
Aus Lemma 4.1 folgt dann, daß (X_n, Y_n) irreduzibel und aperiodisch ist.

Man rechnet leicht nach, daß $\hat{\pi}(i,j) = \pi(i)\pi(j)$ eine Gleichgewichtsverteilung für (X_n, Y_n) ist.
$\Rightarrow^4 (X_n, Y_n)$ ist positiv rekurrent.
Es sei jetzt $X_0 \equiv i$ und die Startverteilung $\hat{\nu}$ von (X_n, Y_n) gegeben durch $\hat{\nu}(k,l) = \delta_i(k)\pi(l)$, für $b \in S$ sei $T \leq T_{(b,b)}$ und $P_{\hat{\nu}}(T_{(b,b)} < \infty) = 1$
$\Rightarrow P_{\hat{\nu}}(T < \infty) = 1$
Als nächstes sei die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch:

$$Z_n := \begin{cases} X_n & \text{, für } n \leq T \\ Y_n & \text{, für } n > T \end{cases}$$

Wir zeigen: (Z_n) ist eine MK mit ÜM P und $Z_0 \equiv i$.
Nach Satz 1.1 (☞ Seite 4) genügt z.Z. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i_k \in S$:

$$P_{\hat{\nu}}(Z_k = i_k,\ 0 \leq k \leq n) = \delta_i(i_0)\prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k i_k+1}\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall i_k \in S. \tag{4.5.2004}$$

Es gilt: $P_{\hat{\nu}}(Z_k = i_k,\ 0 \leq k \leq n) = \sum_{r=0}^{n} P_{\hat{\nu}}(Z_k = i_k, 0 \leq k \leq n, T > n)$
$= \sum_{r=0}^{n} P_{\hat{\nu}}(Z_k = i_k, 0 \leq k \leq n, T > n) + P_{\hat{\nu}}(Z_k = i_k, 0 \leq k \leq n, T > n)$

$$= \sum_{r=0}^{n} \underbrace{P_{\hat{\nu}}(X_k = i_k, 0 \leq k \leq r,\ Y_k = i_k,\ r+1 \leq k \leq n,\ Y_0 \neq i_0, \ldots, Y_{r-1} \neq i_{r-1}, Y_r = i_r)}_{=:I}$$
$$+ \underbrace{P_{\hat{\nu}}(X_k = i_k, 0 \leq k \leq n,\ Y_0 \neq i_0, \ldots, Y_n \neq i_n)}_{=:II}$$

Da $(X_n), (Y_n)$ unabhängig, gilt:
$I = P_{\hat{\nu}}(X_k = i_k, 0 \leq k \leq r)$
$\quad * P_\pi(Y_k = i_k, r+1 \leq k \leq n | X_0 \neq i_0, \ldots, Y_{r-1} \neq i_{r-1}, Y_r = i_r)$
$\quad * P_\pi(Y_0 \neq i_0, \ldots, Y_{r-1} \neq i_{r-1}, Y_r = i_r)$
$= \delta_i(i_0)\prod_{k=0}^{n} p_{i_k i_{k+1}} P\pi(Y_0 \neq i_0, \ldots, Y_{r-1} \neq i_{r-1}, Y_r = i_r)$

$II = \delta_i(i_0)\prod_{k=0}^{n} p_{i_k i_{k+1}} P\pi(Y_0 \neq i_0, \ldots, Y_n \neq i_n)$

---
[3] stochastisch unabhängig
[4] ☞ Satz 3.2, Seite 14

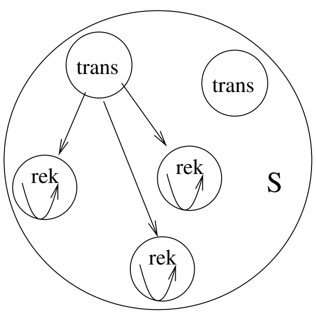
Insgesamt:
$P_{\hat{\nu}}(Z_k = i_k, 0 \leq k \leq n) = I + II$
$= \delta_i(i_0) \prod_{k=0}^{n} p_{i_k i_{k+1}} \underbrace{(\sum_{r=0}^{n} P\pi(Y_0 \neq i_0, \ldots, Y_{r-1} \neq i_{r-1}, Y_r = i_r) + P_\pi(Y_0 \neq i_0, \ldots, Y_n \neq i_n))}_{=1}$

Nun folgern wir daraus die Aussage des Satzes:
Es gilt:
$p_{ij}^{(n)} = P_{\hat{\nu}}(Z_n = j) = P_{\hat{\nu}}(Z_n = j, T \leq n) + P_{\hat{\nu}}(Z_n = j, T > n)$
$\pi(j) = P_\pi(Y_n = j) = P_{\hat{\nu}}(Z_n = j, T \leq n) + P_{\hat{\nu}}(Y_n = j, T > n)$
$\Rightarrow |p_{ij}^{(n)} - \pi(j)| = |P_{\hat{\nu}}(Z_n = j, T > n) - P_{\hat{\nu}}(Y_n = j, T > n)|$
$\leq 2 * P_{\hat{\nu}}(T > n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, da $P_{\hat{\nu}}(T < \infty) = 1$. □

Satz 4.3 Seien $i, j \in S$, d_j die Periode von j.
Dann gilt für $1 \leq r \leq d_j$:
$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd_j+r)} = \frac{d_j}{m_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(kd_j+r)}$
Speziell:

(i) j transient oder null-rekurrent (d.h. $m_j = \infty$) $\Rightarrow p_{ij}^{(n)} \to 0$

(ii) j aperiodisch ($d_j = 1$) $\Rightarrow p_{ij}^{(n)} \to \frac{f_{ij}^*}{m_j}$



(transiente Klassen führen irgendwann in eine rekurrente Klasse (falls vorhanden))

II. Zeitstetige Markov Ketten

• Eine Familie von ZV $X_t : \Omega \to S$ über einen gemeinsamen WR $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und einen gemeinsamen Zustandsraum (meßbar) $(S, \mathcal{L})$, die von einem Parameter t abhängen, mit $t \in T$ (T überabzählbar, z.B. $T = [a, b],\ T = [0, \infty)$) heißt stochastischer Prozess .
• Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die (nicht zufällige) Funktion $X(\omega) : T \to S$ Realisierung oder Trajektorie von (X_t).

§5. Definition elementarer Eigenschaften

Definition: Ein stochastischer Prozess $(X_t, t \geq 0)$ mit höchstens abzählbarem Zustandsraum S heißt (stationäre) Markov-Kette (MK), falls gilt:
$\forall n, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n,\ t, h > 0, \forall i_k \in S$ mit $P(X_{t_k} = i_k, o \leq k \leq n) > 0$:

$$
\begin{aligned}
P(X_{t_n+h} = i_{n+1} | X_{t_k} = i_k, 0 \leq k \leq n) &= P(X_{t_n+h} = i_{n+1} | X_{t_k} = i_n) \\
&= P(X_{t+h} = i_{n+1} | X_t = i)
\end{aligned}
$$

Definition: Eine Familie von stochastischen $S \times S$-Matrizen, $(p(t), t \geq 0)$ mit den Eigenschaften:

(i) $p(0) = (\delta_{ij}) = E$

(ii) $p(s + t) = p(s) * p(t),\ s, t \geq 0$ ("Halbgruppeneigenschaft")

heißt Übergangsmatrizenfunktion (ÜMF).

Satz 5.1 Sei (X_t) eine MK, dann gibt es eine ÜMF $(p(t), t \geq 0)$
mit $P(X_{t+h} = j | X_t = i) = p_{ij}(h)\ \forall t, h \geq 0, \forall i, j \in S,\ P(X_t = i) > 0$

Beweis: Sei $M := \{i \in S | P(X_t = i) > 0$ für ein $t \geq 0\}$
$i \in M :\ p_{ij}(h) := P(X_{t+h} = j | X_t = i)$ für geeignetes t.
$i \notin M :\ p_{ij}(h) := \delta_{ij},\ h \geq 0$
Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
i \in M : p_{ij}(s + t) &= P(X_{r+s+t} = j, X_{r+s} = k | X_r = i) \text{ für geeignetes } t. \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} P(X_{r+s+t} = j,\ X_{r+s} = k | X_r = i) \\
&\quad\ \text{mit } P(X_{r+s} = k, X_r = i) > 0 \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} P(X_{r+s} = k | X_r = i) P(X_{r+s+t} = j | X_r = i, X_{r+s} = k) \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} P_{ik}(s) P_{kj}(t), \text{ da } (X_t) \text{ MK} \qquad \text{"Chapman-Kolmogoroff-Gleichung"}
\end{aligned}
$$

und $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$
$i \notin M$: klar. □.

Satz 5.2 Sei (X_t) eine MK mit ÜMF $(p(t), t \geq 0)$. Dann gilt $\forall n, \forall i_k \in S,\ k = 0, \ldots, n$:
$P(X_{t_k} = i_k, 0 \leq k \leq n) = P(X_{t_0} = i_0) \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1} i_k}(t_k - t_{k-1})$

Beweis: Induktion nach n (☞ Satz 1.1, Seite 4)

Satz 5.3 (Existenzsatz für MK)
Seit $(p(t), t \geq 0)$ eine ÜMF, ν eine Startverteilung auf S.
Sei $\Omega := S^{\mathbb{R}_+}$ (d.h. die Menge aller Abbildungen $g : \mathbb{R}_+ \to S$).
$\mathcal{F} := \otimes_{t \geq 0} \mathcal{P}(S)$, $X_t := pr_t$. Dann existiert genau ein WMaß P auf $\mathcal{F}$, so daß (X_t) eine MK ist und daß $(p(t), t \geq 0)$ eine ÜMF von (X_t) ist und $P(X_0 = i_0) = \nu(i_0)$, $i_0 \in S$.

Beweis: Satz von Kolmogoroff

Problem: Unter welchen Voraussetzungen kann man die "ganze" ÜMF aus einfachen Daten bestimmen? (10.5.2004)

§6. Eigenschaften von ÜMF

Definition: Erfüllt die ÜMF $(p(t), t \geq 0)$ zusätzlich die Bedingung

$$\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}, \ \forall i, j \in S$$

d.h. $p(t)$ ist rechtsseitig stetig in 0, dann heißt sie Standard-ÜMF!Standard (SÜMF).
($p(t)$ i.a. nicht stetig in 0 ☞ Chung (67), S. 129)

Lemma 6.1 Sei $(p(t), t \geq 0)$ eine SÜMF. Dann gilt:

a) $p_{ij}(t)$ ist gleichmässig stetig in t $\forall i, j \in S$

b) $p_{ii}(t) > 0$ $\forall t > 0, \forall i \in S$

c) $p_{ij}(t) \equiv 0$ oder > 0 $\forall t > 0$, $i \neq j$

Beweis:

a) $\forall i, j \in S$, $t \geq 0$, $h > 0$ gilt:
$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| = |\sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) + p_{ij}(t) \underbrace{(p_{ii}(h) - 1)}_{-\sum_{k \neq i} p_{ik}(h)}|$$
$$\leq \underline{1 - p_{ii}(h)}, \text{ da } |p_{kj}(t) - p_{ij}(t)| \leq 1$$
↖ unabhängig von t
→ gleichmäßig stetig in t

b) $p_{ii}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}\left(\frac{t}{2}\right) p_{ki}\left(\frac{t}{2}\right) \geq (p_{ii}(\frac{t}{2}))^2$ $\forall t \geq 0$
Induktion: $p_{ii}(t) \geq (\underbrace{p_{ii}(\frac{t}{2n})}_{*})^{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

* $\forall n \geq n_0$ wegen Stetigkeit in 0.

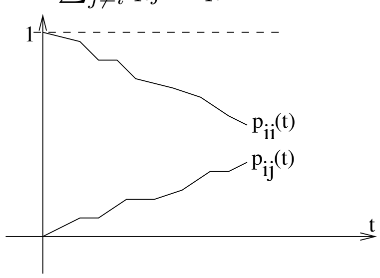
c) o.B. (☞ Chang S. 126)

□

Satz 6.2 Sei $(p(t), t \geq 0)$ eine SÜMF.

a) $p_{ij}(t)$ ist in 0 (rechtssitig) differenzierbar,
   d.h. es existiert $p'_{ij}(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$ $\forall i, j \in S$.

b) Für $q_{ij} := p'_{ij}(0)$ gilt:
   $0 \leq q_{ij} < \infty, \ i \neq j$
   $-\infty \leq q_{ii} \leq 0 \quad (q_i := -q_{ii})$
   $0 \leq \sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i \leq \infty$



<u>Beweis:</u> S o.B. (Chang Theorem II.2.4, Theorem II.12.8)

Bemerkung: S endlich, dann gilt: $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \forall i \in S$
q_{ij} heißen <u>Übergangsintensitäten</u> und $Q = (q_{ij})$ heißt <u>Intensitätsmatrix</u>.

<u>Interpretation der Übergangsintensitäten</u>
$i \neq j$: $P(X_{t+h} = j | X_t = i) = p_{ij}(h) =$[5]$q_{ijr}h + o(h)$
$i = j$: $P(X_{t+h} = i | X_t = i) = p_{ii}(h) = 1 - q_i h + o(h)$

Definition:

a) $i \in S$ heißt <u>stabil</u> $\Leftrightarrow 0 < q_i < \infty$
   <u>instabil</u> $\Leftrightarrow q_i = \infty$
   <u>absorbierend</u> $\Leftrightarrow q_i = 0$

b) Eine SÜMF $(p(t), t \geq 0)$ heißt <u>konservativ</u> $\Leftrightarrow \sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty \ \forall i \in S$

Bemerkung:

a) S endlich $\Rightarrow$ SÜMF konservativ

b) Man kann zeigen:
   i instabil $\Rightarrow \forall s > 0$: $P(X_{t+h} = i, \ \forall h \in (0, s] \mid X_t = i) = 0$
   ,d.h. Zustand i wird sofort verlassen.
   i absorbierend $\Rightarrow P(X_{t+h} = i | X_t = i) = 1 \ \forall h > 0$
   i stabil $\Rightarrow P(X_{t+h} = i \ \forall h \in (0, s] \mid X_t = i) = e^{-q_i S}$
   ,d.h. die Verweilzeit ist $exp(q_i)$-verteilt.

c) Ist $sup_{i \in S} q_i < \infty \Rightarrow$fast alle Pfade $t \mapsto X_t(\omega)$ sind rechtsseitig stetig.

[5] Taylor

§7. Die Kolmogoroffschen Vorwärts-Rückwärts-Dgl

Aus der Intensitätsmatrix Q kann unter Regularitätsvoraussetzungen die ganze SÜMF $(p(t), t \geq 0)$ gewonnen werden.

Satz 7.1 Die SÜMF $(p(t), t \geq 0)$ sei konservativ. Dann sind $p_{ij}(t), t \geq 0$ differenzierbar und erfüllen das sogenannte Kolmogoroffsche Rückwärts-Dgl-System:
$p'(t) = Qp(t),\ t \geq 0$, d.h. $p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t),\ \forall i, j \in S$.

Beweis: (heuristisch[6]):
$p(s+t) = p(s) * p(t)\ \forall s, t \geq 0$
(Ableitung nach S) $\Rightarrow p'(s+t) = p'8s) * p(t)$
$s \downarrow 0\ \ \Rightarrow p'(t) = Q * p(t)$ □

Formale Lösung: $p(t) = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n$
S endlich $\Rightarrow$ Reihe konvergiert
S abzählbar (unendlich) $\Rightarrow$ Reihe konvergiert im Allgemeinen nicht.

Bemerkung: Unter weiteren Annahmen (z.B. $sup_{i \in S} q_i < \infty$) gilt auch das Kolmogoroffsche-Vorwärts-Dgl-System:
$p'(t) = p(t)Q,\ t \geq 0$

Beispiel 7.1 $S = \{0, 1\},\ 0 < q_0, q1 < \infty,\ Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 \\ q_1 & -q_1 \end{pmatrix}$
(Zeilensumme= 0, da konservativ, konservativ, da S endlich)
Rückwärts-Dgl: $p'(t) = Qp(t),\ p(0) = E$
(1) $p'_{00}(t) = -q_0 p_{00}(t) + q_0 p_{10}(t)$
(2) $p'_{01}(t) = -q_0 p_{01}(t) + q_0 p_{11}(t)$
(3) $p'_{10}(t) = -q_1 p_{10}(t) + q_1 p_{00}(t)$
(4) $p'_{11}(t) = -q_1 p_{11}(t) + q_1 p_{01}(t)$
Es gilt:
$p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$
$p_{11}(t) = 1 - p_{10}(t)$
Eingesetzt in (2) liefert: $-P'_{00}(t) = -q_0 + q_0 p_{00}(t) + q_0 - q_0 p_{10}(t) = q_0 p_{00}(t) - q_0 p_{10}(t)$
also (2)=-(1), also (2) überflüssig.
Analog (4) überflüssig.
Sei $y(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) \\ p_{10}(t) \end{pmatrix}$.
Zu lösen ist $y'(t) = Qy(t),\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenwerte von Q: $\begin{vmatrix} -q_0 - \lambda & q_0 \\ q_1 & -q_1 - \lambda \end{vmatrix} =$
$(-q_0 - \lambda)(-q_1 - \lambda) - q_0 q_1 = \lambda(q_0 + q_1 + \lambda)$
$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -(q_0 + q_1)$
Eigenverktoren: $\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \nu_2 = \begin{pmatrix} -q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}$

[6] meint hier: "schlampig"

also: $y(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \underbrace{e^{0*t}}_{1} + \beta \begin{pmatrix} -q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} e^{-(q_0+q_1)t}$

$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert: $\alpha = \frac{q_1}{q_0+q_1},\ \beta = -\frac{1}{q_0+q_1}$

Insgesamt:

$p_{00}(t) = \frac{q_1}{q_0+q_1} + \frac{q_0}{q_0+q_1} e^{-(q_0+q_1)t}$

$p_{10}(t) = \frac{q_1}{q_0+q_1} - \frac{q_1}{q_0+q_1} e^{-(q_0+q_1)t}$

(11.5.2004)

§8. Grundlegende Struktur einer MK

Voraussetzung:

(R) (i) $(p(t), t \geq 0)$ SÜMF

(ii) Intensitätsmatrix Q konservativ

(iii) Pfade von (X_t) sind rechtsseitig stetig (z.B. erfüllt bei $sup_{i \in S} q_i < \infty$)

Sprungzeiten:

$\sigma_0 := 0,\ \sigma_1 := inf\{t > 0 | X_t \neq X_0\},$

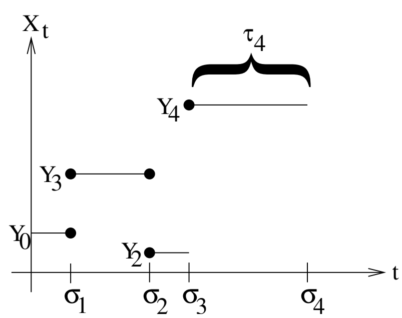
$\sigma_n := inf\{t > \sigma_{n-1} | X_t \neq X_{\sigma_{n-1}}\}, n \geq 2$

Verweildauern:

$n \geq 1 \quad \tau_n := \begin{cases} \sigma_n - \sigma_{n-1} & , \text{falls } \sigma_{n-1} < \infty \\ \infty & , \text{falls } \sigma_{n-1} = \infty \end{cases}$

Zustand zur Zeit σ_n:

$Y_n := \begin{cases} X_{\sigma_n} & , \text{falls } \sigma_n < \infty \\ Y_{n-1} & , \text{falls } \sigma_n = \infty \end{cases}$



Satz 8.1 Unter der Voraussetzung (R) gilt:

a) (Y_n) ist eine (zeitdiskrete) MK mit ÜM $P = (p_{ij})$,
wobei $p_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & , \text{falls } i \neq j \text{ , falls } 0 < q_i < \infty \\ 0 & , \text{falls } i = j \end{cases}$
$p_{ij} = \delta_{ij}$, falls $q_i = 0$.

b) $\tau_1, \tau_2, \ldots$ sind bedingt unter (Y_n) stochastisch unabhängig mit $\tau_n \sim exp(q_{y_{n-1}})$,
d.h. $P(Y_{n+1} = j, \tau_{n+1} > t \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}) = \sum_{i \in S} p_{ij} e^{-q_i t} 1_{[Y_n = i]}$ fast sicher.

Bemerkung:

a) Insbesondere läßt sich (X_t) aus der Beziehung $X_t = Y_n$, falls $t \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$ leicht simulieren.

b) Umgekehrt: wird (X_t) wie in a) konstruiert, so ist (X_t) eine (zeitstetige) MK.

Beweis: (teilweise):
Wir zeigen: $P_i(\sigma_1 > t) = e^{-q_i t}, \ \forall i \in s, t \geq 0$
$\forall t > 0$ gilt: $P_i(\sigma_1 > t) = P_i(X_s = i, \ \forall 0 \leq s \leq t)$
$= lim_{n\to\infty} P_i(X_{\frac{kt}{2^n}} = i, \ \forall 0 \leq k \leq 2^n)$
$= lim_{n\to\infty}(p_{ii}(\frac{t}{n}))^n$
Taylor: $p_{ii}(\frac{t}{n} = p_{ii}(0) + p'_{ii}(0)\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n}$
$= 1 - \frac{q_i t}{n} + o(\frac{t}{n})$ für $n \to \infty$
$\Rightarrow P_i(\sigma_1 > t) = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{q_i t + n * o(\frac{t}{n})}{n})^n = e^{-q_i t}$
Rest: rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten. □

§9. Beispiele

§9.1. Der Poisson-Prozess

Definition: Eine MK (X_t) mit $S = \mathbb{N}_0$ heißt Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda > 0$, falls gilt $\forall t \geq 0, i \in S$ mit $P(X_t = i) > 0$:

(i) $P(X_{t+h} = i + 1 \mid X_t = i) = \lambda h + o(h)$

(ii) $P(X_{t+h} \notin \{i, i+1\} \mid X_t = i) = o(h)$

(iii) $P(X_{t+h} = j \parallel X_t = i) = 0, \ 0 \leq j < i$

(iv) $X_0 \equiv 0$

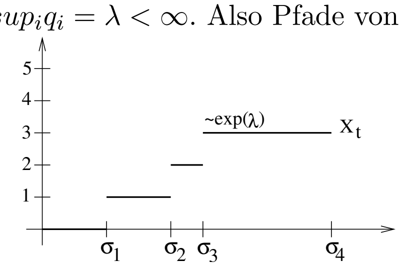
Bemerkung:

a) (X_t) ist also eine MK mit Intensitätsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

b) $lim_{h\downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij}$, also stetig in 0.

c) $sup_i q_i = \lambda < \infty$. Also Pfade von (X_t) rechtsseitig stetig.



"Zählprozess"

Satz 9.1 Sei (X_t) ein Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda > 0$. Dann gilt:

a) $p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & , j \geq i \\ 0 & , j < i \end{cases}$

b) $P(X_t = i) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!},\ i \in S, t \geq 0$ (also $X_t \sim Poisson(\lambda t)$)

c) (X_t) hat stationäre Zuwächse, d.h. für $0 \leq s \leq t:\ P(X_t - X_s = i) = P(X_{t-s} = i)$

d) (X_t) hat unabhängige Zuwächse, d.h.
für $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ sind $X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig.

<u>Beweis:</u>

a) Da $(p(t), t \geq 0)$ offensichtlich eine SÜMF ist und $sup_i|q_i| < \infty$ gilt
das Vorwärts-Dgl-System: $p'(t) = p(t)Q$
Also: $p'_{ii}(t) = -\lambda p_{ii}(t),\ p'_{ij}(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{ij-1},\ j \neq i \quad (p_{ij}(t) = 0, j < i)$
Die Lösung des Vorwärts-Dgl. System ist wie folgt:
$p_{ii}(t) = e^{-\lambda t},\ p_{ij}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s} p_{ij-1}(s)ds \quad j \geq i+1, j < i$
Insbesondere ergibt sich jetzt durch Induktion nach $j = i, i+1, \cdots$:
$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!},\ 0 \leq i \leq j$
<u>$j = i$:</u> klar!
<u>$j \to j+1$:</u> $p_{ij+1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}(\underbrace{e^{-\lambda s}}_{I.H.}\frac{(\lambda s)^{j-i}}{(j-i)!})ds$
$= \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t (\frac{(\lambda s)^{j-i}}{(j-i)!})ds = e^{-\lambda t}\lambda^{j+1-i}\frac{t^{j+1-i}}{(j+1-i)!}$

b) $P(X_t = i) = Poisson(t) \overset{a)}{\Rightarrow}$ Behauptung.

c) $P(X_t - X_s = i) = \sum_{j \in S} P(X_s = j)\underbrace{P(X_t = i+j \mid X_s = j)}_{P_{ji+j}(t-s) = Poisson(t-s)}$
$= Poisson(t-s) = P(X_{t-s} = i)$

d) Nachrechnen.

□

Bemerkung: Erfüllt ein beliebiger Prozess (X_t) mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ die Bedingungen b),c),d) und ist $X_0 \equiv 0$, so ist (X_t) notwendig ein Poisson-Prozess.

§9.2. Geburts- und Todesprozess

Definition: Eine MK (X_t) mit $S = \mathbb{N}_0$ heißt Geburts- und Todesprozess (GTP) mit Parameterfolgen $(\lambda_i), (\mu_i),\ \lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0$,
$\mu_0 = 0$, falls $\forall t \geq 0, \forall i \in S$ mit $P(X_t = i) > 0$ gilt:

(i) $P(X_{t+h} = i+1 \mid X_t = i) = \lambda_i h + o(h)$

(ii) $P(X_{t+h} = i-1 \mid X_t = i) = \mu_i h + o(h)$

(iii) $P(X_{t+h} \notin \{i-1, i, i+1\} \mid X_t = i) = o(h)$

Bemerkung:

a) (X_t) ist eine MK mit Intensitätsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

$S = \mathbb{N}_0,\ (\lambda_i),\ (\mu_i)$

b) $lim_{n\downarrow 0} p_{ij}(n) = \delta_{ij}$, also stetig in 0.

c) (X_t) erfüllt das Vorwärts-Rückwärts-Dgl-System:
$p'(t) = p(T)Q,\ p'(t) = Qp(t)$

(17.5.2004)

Beispiel 9.1 (linearer Geburts- und Todesprozess)
Gegeben: Population mit Anfangsbestand $X_0 = a$ Individuen. Individuen teilen sich unabhängig voneinander in $(t, t+h]$ mit Wahrscheinlichkeit $\lambda h + o(h)$ und sterben unabhängig voneinander in $(t, t+h]$ mit Wahrscheinlichkeit $\mu h + o(h)$ $(\lambda, \mu > 0)$.
$X_t \hat{=} \sharp$ der Individuen zur Zeit $t \geq 0$. $X_0 = a$.

$P(X_{t+h} = i+1 \mid X_t = i)$
$= \binom{i}{1}(\lambda h + o(h))(1 - (\lambda+\mu)h + o(h))^{(i-1)}$
$\quad + \binom{i}{2}(\lambda h + o(h))^2 \binom{i-2}{1}(\mu h + o(h))(1 - (\lambda+\mu)h + o(h))^{i-3}$
$\quad + \cdots$
$= i\lambda h + o(h)$

Analog:
$P(X_{t+h} \geq i+2 \mid X_t = i) = o(h)$
$P(X_{t+h} = i-1 \mid X_t = i) = i\mu h + o(h)$
$P(X_{t+h} \leq i-2 \mid X_t = i) = o(h)$
$\Rightarrow (X_t)$ ist ein Geburts- und Todesprozess mit Parameter $\lambda_i = \lambda * i,\ \mu_i = \mu * i$,
ein sogenannter linearer GTP.

Beispiel 9.2 ($M|M|\infty$ - Warteschlange)
Unendlich viele Bediener. Im Zeitintervall $(t, t+h]$ kommt ein neuer Job mit Wahrscheinlichkeit $\lambda h + o(n)$ an. Die Jobs in Bedienung werden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $\mu h + o(h)$ in $(t, t+h]$ abgefertigt.
$X_t \widehat{=} \sharp$ der Jobs im System zur Zeit $t \geq 0$
$\Rightarrow (X_t)$ ist ein GTP mit Parametern $\lambda_i \equiv \lambda,\ \mu_i = \mu i,\ i \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 9.3 ($M|M|1$ - Warteschlange)
1 Bediener, Bedienstrategie: FCFS (First Come First Serve)
Ankünfte wie oben.
$\Rightarrow (X_t)$ ist ein GTP mit Parametern $\lambda_i \equiv \lambda,\ \mu_0 = 0,\ \mu_i \equiv \mu,\ i \in \mathbb{N}$

§10. Invariante Maße und Grenzwertsätze

Für die MK (X_t) seien folgende Regularitätsvoraussetzungen erfüllt:

(R) (i) $(p(t), t \geq 0)$ sei eine SÜMF
(ii) Q konservativ
(iii) $sup_{i \in S} q_i < \infty$ (oder andere Bedingung, die Explosion verhindert [also nicht unendlich viele Zustandswechsel in endlichem Intervall])

Bedingung (iii) garantiert, daß der Prozess (X_t) nicht explodiert, d.h. bei der Konstruktion in §8 fast sicher nicht unendlich viele Sprünge in endlicher Zeit statt finden.
Wie in §8 sei (Y_n) die eingebettete MK mit ÜM $P = (p_{ij})$

Definition: Die MK (X_t) heißt irreduzibel, falls die EMK (Y_n) irreduzibel ist.

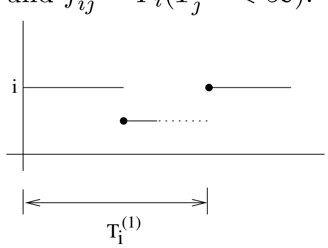
Bemerkung:

(i) (X_t) irreduzibel $\Leftrightarrow p_{ij}(t) > 0\ \forall t > 0,\ i, j \in S$
Da $\forall i, j \in S$ entweder $p_{ij}(t) > 0$ oder $p_{ij}(t) \equiv 0,\ t \geq 0$ (☞ Lemma6.1, Seite 21)

(ii) Eine Periode kann bei (X_t) nicht auftreten. (☞ Lemma6.1, Seite 21)

(iii) Ist (X_t) irreduzibel, so kann (X_t) nur stabile Zustände besitzen.

Die Begriffe "rekurrent" und "transient" werden in Kapitel I definiert.
Es sei $T_i := inf\{t \geq 0 \mid X_t = i\}$, $Vi := inf\{t \geq 0 \mid X_t \neq i\}$, $T_i^{(1)} := inf\{t > V_i \mid X_t = i\}$,
$m_i := E_i[T_i^{(1)}]$
und $f_{ij}^* = P_i(T_j^{(1)} < \infty)$.



Definition: Ein stabiler Zustand $j \in S$ heißt

a) rekurrent, falls $f^*_{jj} = 1$, sonst transient

b) positiv rekurrent, falls j rekurrent und $m_j < \infty$

c) null rekurrent, falls j rekurrent und $m_j = \infty$

Lemma 10.1 Ein stabiler Zustand ist genau dann rekurrent für (X_t), wenn dies für (Y_n) der Fall ist.

Beweis: folgt sofort aus der Definition $\square$

Bemerkung:

(i) Lemma 10.1 gilt nicht für die Begriffe positiv-/null- rekurrent.

(ii) Ist (X_t) irreduzibel, so sind alle Zustände transient oder rekurrent

Definition: Sei (X_t) eine MK mit SÜMF $(p(t), t \geq 0)$. Ein Maß $\mu : S \to \mathbb{R}_+,\ \mu \not\equiv 0$ heißt invariantes Maß falls $\forall t \geq 0 :\ \mu = \mu p(t)$, d.h. $\forall j \in S :\ \mu_i = \sum_{i \in S} \mu_i p_{ij}(t)$.
Gilt $\sum_{i \in S} \mu_i = 1$, so heißt μ Gleichgewichtsverteilung oder stationäre Verteilung.

Bemerkung:

(i) Ist $P(X_0 = j) = \mu_j$, so gilt $P(X_t = j) = \mu_j\ \forall j \in S$, denn:
$P(X_t = j) = \sum_{i \in S} \mu_i p_{ij}(t) = \mu_j$

(ii) Ist (X_t) irreduzibel und μ ein invariantes Maß , so ist $\mu_j > 0\ \forall j \in S$.

Lemma 10.2 Sei (X_t) eine reguläre MK, d.h. (R) ist erfüllt.
Es gilt:

a) μ ist ein invariantes Maß für $(X_t) \Leftrightarrow \mu Q = 0$

b) Ist (X_t) irreduzibel, so gilt: ist ν ein invariantes Maß für die EMK (Y_n), so ist $\mu = \left(\frac{\nu_i}{q_i}\right)_{i \in S}$ ein invariantes Maß für (X_t).
Umgekehrt: ist μ ein invariantes Maß für (X_t), so ist $\mu = (q_i \mu_i)_{i \in S}$ ein invariantes Maß für (Y_n).

Beweis:

a) Unter (R) gelten die Vorwärts- und Rückwärts-Dgl.:
$p'(t) = p(t)Q,\ p'(t) = Qp(t)$
Dann gilt (komponentenweise):
$p(t) = I + \int_0^t p'(s)ds \overset{(\star)}{=} I + \int_0^t p(s)dsQ \overset{(\triangle)}{=} I + Q \int_0^t p(s)ds$
Sei μ ein invariantes Maß für $(X_t) \Rightarrow \mu = \mu p(t)\ \forall t \geq 0$

$\overset{(\star)}{\Rightarrow} \mu = \mu + \mu Qt\ \forall t \geq 0$, also $\mu Qt = 0\ \forall t \geq 0 \Rightarrow \mu Q = 0$
Falls $\mu Q = 0 \overset{(\triangle)}{\Rightarrow} \mu p(t) = \mu\ \forall t \geq 0$
$\Rightarrow$ Behauptung.

b) Alle Zustände sind stabil: $0 < q_i < \infty\ \forall i \in S$.

Es sei $diag(q) = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & \\ & 0 & q_3 & 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ oBdA $S = \mathbb{N}$.

$Q = diag(q)(P - I)$ (nach Satz 8.1, Seite 24, wobei P die ÜM der EMK (Y_n) ist).
Aus a) folgt: μ ist invariantes Maß für (X_t)
$\Leftrightarrow 0 = \mu Q = \mu * diag(q)(P - I) = (\mu_i q_i)_{i \in S}(P - I)$
$\Leftrightarrow (\mu_i q_i)_{i \in S}$ ist ein invariantes Maß für (Y_n).

□ (18.5.2004)

Bemerkung: Aus Satz 3.1 [7] folgt: ist (X_t) irreduzibel und rekurrent, so gibt es ein (bis auf Vielfache) eindeutiges invariantes Maß .

$T_j^0 = inf\{t \geq 0 \mid X_t = j\}$ [8]
$V_j^0 := inf\{t > T_j^0 \mid X_t \neq j\}$,
$T_j := inf\{t > V_j^0 \mid X_t = j\}$
$f_{ij}^* = P_i(T_j < \infty)\ \ m_i = E_i[T_i]$

Satz 10.3 Sei (X_t) eine reguläre MK. Für alle $i, j \in S$ gilt:
$lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{P_i(T_j^0 < \infty)}{m_j q_j}$, wobei für absorbierendes j $(q_j = 0,\ m_j = \infty)$, $m_j q_j := 1$.

<u>Beweis:</u> (teilweise)
Sei j absorbierend: $p_{ij}(t) = P_i(T_j^0 \leq t)\ \forall t \geq 0$
$lim_{t\to\infty} \Rightarrow$ Behauptung.
Sei j stabil:
<u>1. Fall:</u> j transient:
wegen $m_j = E_j[T_j] = \infty$ z.Z. $lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0$.
Für $\varepsilon > 0$ ist $(X_{\varepsilon n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine diskrete MK mit ÜM $P(\varepsilon)$.
j ist transient für $(X_{\varepsilon n}) \Rightarrow lim_{n\to\infty} p_{ij}(\varepsilon n) = 0$.
Nach Lemma 6.1[9] a) ist $p_{ij}(t)$ gleichmäss ig stetig in t.
$\Rightarrow$ behauptung mit $\varepsilon \downarrow 0$.
<u>2. Fall:</u> j rekurrent.
o.B. (schwieriger). □

---

[7] ☞ Seite 13
[8] Nicht mit den Formeln von gestern verwechseln!
[9] ☞ Seite 21

Satz 10.4 Sei (X_t) eine reguläre irreduzible, rekurrente MK. Dann gilt:

a) $lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{m_j q_j}$ $\forall i, j \in S$, unabhängig von i.

b) (X_t) besitzt eine Gleichgewichtsverteilung $\mu = (\mu_i)$. $\in S \Leftrightarrow \exists j \in S,\ j$ ist positiv rekurrent.
In diesem Fall ist $\mu_i = \frac{1}{m_j q_j} > 0$ $\forall j \in S$ und alle Zustände sind positiv rekurrent.

Beweis:

a) (X_t) irreduzibel $\Rightarrow 0 < q_j < \infty$ $\forall j \in S$. Bleibt z.Z. $P_i(T_j^0 < \infty) = 1$ $\forall i, j \in S$.
$P_i(T_j^0 < \infty) = 1 - P_i(T_j^0 = \infty) = 1 - P_i(Y_n \neq j, \forall n \in \mathbb{N}) = 1$, da (Y_n) irreduzibel.

b) Sei μ eine Gleichgewichtsverteilung von (X_t), d.h. $\mu = \mu p(t),\ \forall t \geq 0$.
$\Rightarrow \mu_j = lim_{t\to\infty} \sum_{i\in S} \mu_i p_{ij}(t) =^{10} \sum_{i\in S} \mu_i \underbrace{lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)}_{\frac{1}{m_j q_j}} = \frac{1}{m_j q_j}$
$\Rightarrow m_j = \frac{1}{\mu_j q_j}$. Da $0 < q_j < \infty$ und $0 < \mu_j < 1$ nach Voraussetzung, folgt $m_j < \infty$, also j positiv rekurrent $\forall j \in S$.
Umgekehrt: Sei $j \in S$ positiv rekurrent. Definiere $\mu_j := \frac{1}{m_j q_j} > 0$
$\forall i \in S, t \geq 0$ gilt: $\mu_i = lim_{s\to\infty} p_{ii}(s+t) \overset{C.K.}{=} lim_{s\to\infty} \sum_{j\in S} p_{ij}(s) p_{ji}(t)$
$\geq^{11} \sum_{j\in S} (lim_{s\to\infty} p_{ij}(s)) p_{ji}(t) = \sum_{j\in S} \mu_j p_{ji}(t)$
Da $p_{ji}(t) > 0$ $\forall i, j \in S, \forall t > 0$ folgt $\mu_i > 0$ $\forall i \in S$ und $\sum_{i\in S} \mu_i \geq \sum_{j\in S} \mu_j \underbrace{\sum_{i\in S} p_{ji}(t)}_{=1}$
$= \sum_{j\in S} \mu_j$, also $\mu = \mu p(t)$ $\forall t \geq 0$.
Außerdem gilt: $\sum_{j\in S} \mu_j = \sum_{j\in S} lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) \leq lim_{t\to\infty} \sum_{j\in S} p_{ij}(t) = 1$
und $\mu_j = lim_{t\to\infty} \mu_i p_{ij}(t) =^{12} \sum_{i\in S} \mu_i \underbrace{lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)}_{=\mu_j} = \mu_j \sum_{i\in S} \mu_i$
$\Rightarrow \sum_{i\in S} \mu_i = 1$

□

Bemerkung:

(i) Sei (X_t) positiv rekurrent.
Dann ist die EMK (Y_n) positiv rekurrent $\Leftrightarrow \sum_{j\in S} \frac{1}{m_j} < \infty$,
da $(q_j \mu_j)_{j\in S} = (\frac{1}{m_j})_{j\in S}$ ein invariantes Maß für (Y_n).

(ii) Sei die EMK (Y_n) positiv rekurrent $\Leftrightarrow \sum_{j\in S} \frac{\pi_j}{q_j} < \infty$

[10] majorisierende Konvergenz
[11] Fatou
[12] majorisierende Konvergenz

(iii) Ist (X_t) eine reguläre, irreduzible rekurrente MK, so ist ein invariantes Maß μ für (X_t) gegeben durch
$\mu_j := E_i[\int_0^{T_j} 1_{[X_t=j]}dt]\ \forall j \in S,\ i \in S$ beliebig.

Beispiel 10.1 (GTP)
(X_t) sei ein allgemeiner GTP mit Geburtsraten $\lambda_j > 0$ und Sterberate $\mu_j > 0$
$\Rightarrow (X_t)$ ist irreduzibel.
(X_t) sei regulär ($\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \xi_n} \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j = \infty$, mit $\xi_0 = 1, \xi_n = \frac{\lambda_0 * \cdots * \lambda_{n-1}}{\mu_1 * \cdots * \mu_n},\ n \in \mathbb{N}$)

Wann ist (X_t) positiv rekurrent?
Löse $\pi Q = 0$!

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_0 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$0 = -\lambda_0 \pi + \mu_1 \pi_1$
$0 = \lambda_0 \pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2 \pi_2$
$\vdots$
$0 = \lambda_i \pi_i - (\lambda_{i+1} + \mu_{i+1})\pi_{i+1} + \pi_{i+2}\mu_{i+2},\ i \geq 1$
$\Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$
$\pi_2 = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{(\lambda_1+\mu_1)\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 - \frac{\lambda_0\mu_1}{\mu_1}\pi_0\right) = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$

<u>Vermutung:</u> $\pi_{i+1} = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}}\pi_0\ , i \geq 0$
<u>Beweis:</u> Einsetzen:
$0 = \lambda_i \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i}\pi_0 - (\lambda_{i+1} + \mu_{i+1})\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}}\pi_0 + \mu_{i+2}\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i+1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i+2}}\pi_0$
$= \lambda_i \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} - (\lambda_{i+1} + \mu_{i+1})\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}} + \mu_{i+2}\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i+1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i+2}}$
$= -(\lambda_{i+1})\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}} + \mu_{i+2}\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i+1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i+2}}$
$= -\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i+1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}} + \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i+1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}}$
$= 0$[13]
$\Rightarrow \boxed{(X_t) \text{ positiv rekurrent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \cdots \mu_{n+1}} < \infty}$
Die stationäre Verteilung ist $\pi_{i+1} = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}}\pi_0,\ i \geq 0$

[13] ohne Gewähr!

(24.5.2004)

§11. Warteschlangentheorie

Wir machen nun die folgenden Annahmen:

- Jobs kommen stets einzeln an.
  Die Zwischenankunftszeiten seinen *iid* und $\sim exp(\lambda),\ \lambda > 0$.
  (d.h. Ankunftsprozess=Poisson-Prozess)
- Jobs werden einzeln abgefertigt nach der FCFS Bedienstrategie.
- Die Bedienzeiten seien unabhängig und exponential verteilt.

X_t sei stets die Anzahl der wartenden Jobs zur Zeit t.

§11.1. $M|M|1$-Modell

$1 \hat{=} 1$ Bediener
Bedienzeiten *iid* $\sim exp(\mu)$
(X_t) ist ein GTP mit Parameter $\lambda_i \equiv \lambda,\ \mu_0 = 0,\ \mu_i \equiv \mu, i \in \mathbb{N}$.
Es sei $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ die sogenannte Verkehrsintensität ((X_t) ist regulär!)

Satz 11.1 Das $M|M|1$-Modell ist positiv rekurrent $\Leftrightarrow \rho < 1$
In diesem Fall ist die Gleichgewichtsverteilung π geometrisch;
$\pi_i = (1-\rho)\rho^i,\ i \in \mathbb{N}_0$

Beweis: siehe Beispiel 10.1[14]:
(X_t) positiv rekuirrent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \cdots \mu_{n+1}} =^{15} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{\mu^{n+1}} \overset{!}{<} \infty \Leftrightarrow \lambda < \mu$
Als Lösung von $\pi Q = 0$ ergab sich: $\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0,\ i \in \mathbb{N}_0$
$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{\pi_0}{1-\rho} \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow \pi_0 = 1-\rho$
$\Rightarrow$ Behauptung. □
Insbesondere gilt im "Gleichgewicht":
[16]$P(X=0) = \pi_0 = 1-\rho$: Wahrscheinlichkeit, daß der Bediener **un**beschäftigt ist.
$EX = \frac{\rho}{1-\rho}$: durchschnittliche Anzahl von Jobs im System

§11.2. $M|M|\infty$-Modell

$\infty \hat{=} \infty$ viele Bediener vorhanden
(X_t) ist ein GTP mit Parametern $\lambda_i \equiv \lambda,\ \mu_i = i\mu, i \in \mathbb{N}_0$
Es sei $\eta := \frac{\lambda}{\mu}$. ($(X_t)$ ist regulär!)

---

[14]☞ Seite 32
[15]gemoetrische Reihe
[16]X_t konvergiert in Verteilung gegen X

Satz 11.2 Das $M|M|\infty$-Modell ist stets positiv rekurrent. Die Gleichgewichtsverteilung ist eine Poisson-Verteilung mit Erwartungswert η.

Beweis: (X_t) positiv rekurrent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}_{=\eta}^{n+1} < \infty \ \forall \eta \in \mathbb{R}$

Gleichgewichtsverteilung: $\pi_i = \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}_{=\eta}^{i} \frac{1}{i!} \pi_0$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} = \pi_0 e^{\eta} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \pi_0 = e^{-\eta}$ □

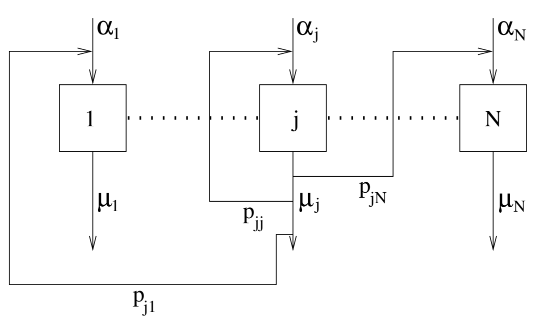
§11.3. Erlangs loss system

Telefonzentrale: k Leitungen. Ankünfte von Anrufen gemäß eines Poisson-Prozesses mit Parameter $\lambda > 0$. Rufdauern $iid \sim exp(\mu),\ \mu > 0$. Sind alle Leitungen besetzt, geht ein ankommender Anruf verloren.
Wie groß ist (im Gleichgewicht) der Bruchteil verloren gegangener Anrufe?
$X_t = \sharp$ der besetzten Leitungen zur Zeit $t \geq 0$.
(X_t) ist GTP mit Parameter
$\lambda_i \equiv \lambda,\ i = 0, \dots, k-1$ und $\lambda_i = 0,\ i = k, k+1, \dots,$
$\mu_i = \mu i,\ i = 0, \dots, k$ und $\mu_i = 0,\ i = k+1, k+2, \dots$
(X_t) positiv rekurrent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \cdots \mu_{n+1}} = \sum_{n=1}^{k} \cdots < \infty$
Gleichgewichtsverteilung: $\eta := \frac{\lambda}{\mu},\ \pi_i = \frac{\eta^i}{i!} \pi_0, i = 0, \dots, k$
$\sum_{i=0}^{k} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{k} \frac{\eta^i}{i!} \stackrel{!}{=} 1$
$\Rightarrow \pi_i = \frac{\eta^i}{i!} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\eta^i}{i!}\right]^{-1}$
Bruchteil verloren gegangener Anrufe:

$$\boxed{E_k(\eta) = \frac{\eta^k}{k!} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\eta^i}{i!}\right]^{-1} \qquad \text{Erlang Loss Formel}}$$

$\pi_k =: E_k(\eta)$ heißt Erlang-Koeffizient.

§11.4. Jackson-Netzwerk



Jeder Job kann mit entsprechender Wahrscheinlichkeit nacheinander verschiedene Stationen durchlaufen. In der Regel verläßt er irgendwann das System $\Rightarrow \sum p_{ij} < 1$

N Stationen, 1 Bediener pro Station.
Poisson-Ankünfte an der Station j mit Intensität $\alpha_j > 0, j = 1, \ldots, N$
Bedienzeiten an Station j exponential verteilt mit Parameter $\mu_j > 0, j = 1, \ldots, N$
Routingwahrscheinlichkeiten: $0 \leq p_{ij} \leq 1,\ \forall i, j \in [1, \ldots, N],\ \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \leq 1,$
$P = (p_{ij})$ heißt Routing Matrix.

Voraussetzung: $P^n \to \mathfrak{o}$[17] für $n \to \infty$.
z.B. erfüllt, falls $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} < 1,\ \forall i = 1, \ldots, N$ ("P transient") $\Rightarrow (I - P)^{-1}$ existiert.

Verkehrsgleichungen:

$$\lambda_k = \alpha_k + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{ik}, \quad k = 1, \ldots, N \tag{$*$}$$

λ_k =nominale, totale Ankunftsrate an Station k.

$\lambda = \alpha + \lambda P \Leftrightarrow \lambda(I - P) = \alpha \quad \Rightarrow \boxed{\lambda \overset{Vor.}{=} \alpha(I - P)^{-1}}$ eindeutige Lösung von $(*)$.

Sei jetzt:
$X_t = (X_1(t), \ldots, X_N(t)),\ X_j(t) = \sharp$ der wartenden Jobs an Station j zur Zeit $t \geq 0$.
Alle Vorgänge seien unabhängig voneinander.

(X_t) ist eine MK mit Intensitätsmatrix $Q = (q_{ij})$, wobei für $i, j \in \mathbb{N}_0^N = S$:

$$q_{ij} = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_k & , j = i + e_k & , k = 1, \ldots, N \\ \mu_k p_{kl} \delta(i_k) & , j = i - e_k + e_l & , k, l = 1, \ldots, N \\ \mu_k p_{k0} \delta(i_k) & , j = i - e_k & , k = 1, \ldots, N \end{array} \right\}, i \neq j \text{[18][19]}$$

$(p_{j0} := 1 - \sum_{k=1}^{N} p_{jk})$
$e_k = k$-ter Einheitsvektor$\rightarrow$ $e_k + i$ bedeutet Zustandsvektor i wird in Komponente k um 1 erhöht.
Unter den Voraussetzungen ist (X_t) irreduzibel.

Lösen von $\pi Q = 0$:

$$\sum_{i \in S} \pi(i) q_{ij} = 0\ \forall j \in S = \mathbb{N}_0^N \Leftrightarrow \boxed{\sum_{i \in S} \pi(i) q_{ij} = \pi(j) \underbrace{\sum_{i \in S} q_{ji}}_{=0}\ \ \forall j \in S \text{ global balance}}$$

Global-balance-Gleichungen:

$$\pi(j) \left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k + \sum_{k=1}^{N} \delta(j_k) \mu_k \right]$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \pi(j - e_k) \alpha_k \delta(j_k) + \sum_{k=1}^{N} \pi(j + e_k) \mu_k p_{k0} + \sum_{l=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \pi(j + e_l - e_k) \mu_l p_{lk} \delta(j_s)$$
$$, \forall j \in S$$

[17] Nullmatrix
[18] Diagonalelemente = 0!
[19] δ meint das Kronecker-Symbol.

(25.5.2004)

Local-balance Gleichungen: für jede Station gelte Ausflußrate=Einflußrate
Station k:
(1) $\pi(j)\mu_k = \pi(j-e_k)\alpha_k + \sum_{l=1}^N \pi(j-e_l-e_k)\mu_l p_{lk},\ j_k > 0$
"Station 0":[20]
$(2)\pi(j)\sum_{k=1}^N \alpha_k = \sum_{k=1}^N \pi(j+e_k)\mu_k p_{k0},\ j \in S$
$(1)\Leftrightarrow \pi(j+e_k)\mu_k = \pi(j)\alpha_k + \sum_{l=1}^N \pi(j+e_k)\mu_l p_{lk},\ j\in S$
$\Rightarrow 1 = \frac{\pi(j)}{\pi(j+e_k)\mu_k}\alpha_k + \sum_{l=1}^N \frac{\pi(j+e_l)}{\pi(j+e_k)}\frac{\mu_l}{\mu_k}p_{lk},\ j\in S$
$\Leftrightarrow \lambda_k = \frac{\pi(j)\lambda_k}{\pi(j+e_k)\mu_k}\alpha_k + \sum_{l=1}^N \frac{\pi(j+e_l)}{\pi(j+e_k)}\frac{\mu_l}{\mu_k}p_{lk}\frac{\lambda_k\lambda_l}{\lambda_l},\ j\in S$
Da $\lambda_k = \alpha_k + \sum_{i=1}^N \lambda_i p_{ik},\ k=1,\dots,N$ eine eindeutige Lösung besitzt, folgt mit Koeffizientenvergleich:

(i) $\lambda_k\frac{\pi(j)}{\pi(j+e_k)\mu_k} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi(j)}{\pi(j+e_k)} = \frac{\mu_l}{\lambda_k},\ j\in S, k=1,\dots,N$

(ii) $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}\frac{\pi(j+e_l)}{\pi(j+e_k)}\frac{\mu_l}{\mu_k} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi(j+e_l)}{\pi(j+e_k)} = \frac{\lambda_l}{\lambda_k}\frac{\mu_k}{\mu_l},\ j\in S,\ k,l=1,\dots,N$

(i)$\Rightarrow \pi(j) = \frac{\lambda_1}{\mu_1}\pi(j-e_1) = \dots = \prod_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k}\right)^{j_k}\pi(\vec{0})$ $\Rightarrow$(ii) ist ebenfalls erfüllt.
Normierung: $\left(\sum_{j\in S} = \sum_{j_1=0}^\infty \cdots \sum_{j_N=0}^\infty\right)$

$1 = \sum_{j\in S}\pi(j) = \pi(\vec{0}\sum_{j\in S}\prod_{k_1}^N \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k}\right)^{j_k}$
$= \pi(\vec{0}\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-\frac{\lambda_k}{\mu_k}}$, falls $\rho_k := \frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1,\ k=1,\dots,N$
Somit: (X_t) positiv-rekurrent, falls $\rho_k < 1,\ k=1,\dots,N$.

Satz 11.3 Das Jackson-Netzwerk ist positiv rekurrent $\Leftrightarrow \rho_k := \frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1,\ k=1,\dots,N$. In diesem Fall ist die Gleichgewichtsverteilung gegeben durch
$\pi(j_1,\dots,j_N) = \prod_{k=1}^N (1-\rho_k)\rho_k^{j_k}$.

Bemerkung: Die Darstellung der Gleichgewichtsverteilung in Satz 11.3 heißt auch Produktform,
da $P(X_1(t)=j1,\dots,X_N(t)=j_N) = \prod_{k=1}^N P(X_k(t)=j_k)$

[20] alles außerhalb des Netzwerks

§12. Reversibilität

Definition: Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$[21] heißt <u>reversibel</u>,
falls $(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \overset{\alpha}{=} (X_{\Delta-t_1},\dots,X_{\Delta-t_n})$
für alle $-\infty < t_1 < \dots < t_n < \infty,\ \Delta\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$[22]

Definition: Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ heißt <u>stationär</u>,
falls $(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \overset{\alpha}{=} (X_{t_1+\Delta},\dots,X_{t_n+\Delta})$
für alle $-\infty < t_1 < \dots < t_n < \infty,\ \Delta\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$

Satz 12.1
Eine reguläre, stationäre MK ist reversibel $\Leftrightarrow\ \exists$ Verteilung $(\pi_j)_{j\in S},\ \pi_j > 0\ \forall j\in S$, so daß die <u>detailed balance-Gleichungen</u> $\pi_j q_{jk} = \pi_k q_{kj}\ \forall j,k\in S$ erfüllt sind. In diesem Fall ist $(\pi_j)_{j\in S}$ die Gleichgewichtsverteilung der MK.

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$" Sei die MK reversibel. Dann ist (X_t) auch stationnär,
da $(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \overset{\alpha}{=} (X_{-t_1},\dots,X_{-t_n}) \overset{\alpha}{=} (X_{t_1+\Delta},\dots,X_{t_n+\Delta})$.
Weiter gilt: $P(X_t=j, X_{t+\Delta}=k) = P(X_t=k, X_{t+\Delta}=j),\ \Delta>0$.
Sei $\pi_j := P(X_t=j)$ für $t\in\mathbb{R}$ fest.
$$\Rightarrow \pi_j \underbrace{\frac{P(X_{t+\Delta}=k \mid X_t=j)}{\Delta}}_{\to q_{jk}, \Delta\to 0} = \pi_k \underbrace{\frac{P(X_{t+\Delta}=j \mid X_t=k)}{\Delta}}_{\to q_{kj}\ f\ddot{u}r\ \Delta\to 0}$$
"$\Leftarrow$" ohne Beweis. □

Lemma 12.2 Für eine reguläre, stationäre MK mit Zustandsraum S gilt für alle $A\subset S$:
$$\sum_{j\in A}\sum_{k\in S\setminus A} \pi_j q_{jk} = \sum_{j\in A}\sum_{k\in S\setminus A}\pi_k q_{kj}$$
wobei $(\pi_j)_{j\in S}$ die Gleichgewichtsverteilung ist.

<u>Beweis:</u> Es gilt: $\pi_j \underbrace{\sum_{k\in S} q_{jk}}_{=0} = \sum_{k\in S}\pi_k q_{kj}\ \forall j\in S$
$$\Rightarrow \begin{array}{r|rl} & \sum_{j\in A}\sum_{k\in S}\pi_j q_{jk} & = \sum_{j\in A}\sum_{k\in S}\pi_k q_{kj} \\ & -\sum_{j\in A}\sum_{k\in A}\pi_j q_{jk} & = -\sum_{j\in A}\sum_{k\in A}\pi_k q_{kj} \\ \hline + & \Rightarrow \text{Behauptung.} & \end{array}$$
□

Sei (X_t) eine MK. Assoziierter Graph:
 Ecken: S
 Kanten: Kante zwischen j und $k \Rightarrow q_{jk}>0$ oder $q_{kj}>0\ k\neq j$

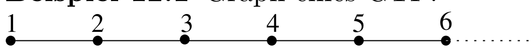
Lemma 12.3 Ist der assoziierte Graph einer regulären, stationären MK ein Baum, so ist die MK reversibel.

<u>Beweis:</u> z.Z.: (nach Satz 12.1[23]) $\pi_j q_{jk} = \pi_k q_{kj}\ \forall j,k\in S, j\neq k$.
<u>Fall 1:</u> $\nexists$ Kante zwischen j und $k\ \Rightarrow q_{jk}=q_{kj}=0\ \Rightarrow$Behauptung.

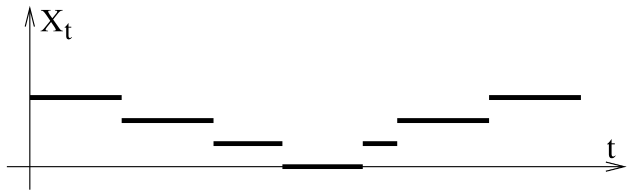
[21] kein Anfang
[22] Vorwärts oder Rückwärts egal
[23] ☞ Seite 37

<u>Fall 2:</u> $\exists$ Kante zwischen j und k. Da G ein Baum, zerfällt der Graph nach Wegnahme der Kante (j,k) in zwei disjunkte Mengen $A \subset S, S\backslash A$ und $j \in A, k \in S\backslash A$.
Lemma 12.2 $\Rightarrow \pi_k q_{jk} = \sum_{k_1 \in A} \sum_{k_2 \in S\backslash A} \pi_{k_1} q_{k_1 k_2} = \sum_{k_1 \in A} \sum_{k_2 \in S\backslash A} \pi_{k_2} q_{k-2k_1} = \pi_k q_{kj}$ $\square$

Beispiel 12.1 Graph eines GTP:



ist ein Baum $\Rightarrow$ jeder stationäre GTP ist reversibel.
Insbesondere: $X_t = \sharp$ der wartenden Jobs im $M|M|1$-Modell ist ein GTP, also reversibel, falls $\lambda < \mu$.



$\Rightarrow$ der Abgangsprozess der Jobs ist selbst wieder ein Poisson-Prozess mit Parameter λ.

— ENDE —

III. Literatur zur Vorlesung

Literatur zur Vorlesung

Stochastische Prozesse

Aldous, D., J.A. Fill:	Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs. Buchmanuskript. http://www.stat.berkeley.edu/users/aldous/RWG/book.html
Brémaud, P. (1999):	Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues. Springer, New York.
Chung, K.L. (1967):	Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Spring, Berlin.
Feller, W. (1968/71):	An Introduction to Probability Theory, Vol I/II Wiley, New York
Norris, J. (1997):	Markov chains. Cambridge University Press. http://www.statslab.cam.ac.uk/~james/Markov/
Resnick, S. (1992):	Adventures in Stochastic Processes. Birkhäuser, Boston.
Ross, S. (1996):	Stochastik Processes. Wiley, New York.
Shiryaev, A.N. (1996):	Probability. Springer, New York.

Simulation von Markov-Ketten mit 4 Zuständen:
http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Waner/markov/markov.html

IV. Abkürzungen

$\delta_i(a)$	Kronecker-Symbol
$exp()$	exponential verteilt
$\sharp$	Anzahl
$A \overset{\alpha}{=} B$	A hat gleiche Verteilung wie B
EMK	Eingebettete Markov-Kette
GTP	Geburts- und Todesprozess
iid	(stochastisch) unabhängig und identisch verteilt
MK	Markov-Kette
oBdA	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
SÜMF	Standard-ÜMF
ÜM	Übergangsmatrix
ÜMF	Übergangsmatrizenfunktion
W	Wahrscheinlichkeiten
WMaß	Wahrscheinlichkeitsmaß
WRaum	Wahscheinlichkeitsraum
ZV	Zufallsvariablen
zZ	zu Zeigen

Index